Universidad Industrial de Santander

Examen Admisión
Maestría en Matemáticas
Febrero 05 de 2020
Escuela de Matemáticas

Nombre: ______________________________

ÁLGEBRA LINEAL

1. Dada $A \in M_{n\times n}$, definamos

$$W_A = \{L \in M_{n\times n} : LA = AL\}.$$

   a) Demuestre que W_A es un espacio vectorial.
   b) Encuentre una base y calcule la dimensión de W_B y W_C cuando:
      1) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; y
      2) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   c) Encuentre si es posible, en cada enunciado, una matriz $A \in M_{2\times 2}$ tal que :
      1) $\dim(W_A) = 0$.
      2) $\dim(W_A) = 1$.
      3) $\dim(W_A) = 2$.
      4) $\dim(W_A) = 3$.
      5) $\dim(W_A) = 4$.

      Argumente su respuesta.

2. Encuentre una matriz $A \in M_{4\times 4}$ tal que:

$$\mathrm{Nu}(A) = \mathrm{Im}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2w = 0, z = 0\}.$$

3. Sea V un espacio vectorial real tal que $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V. Si $T\colon V \to V$ es una tranformación lineal tal que

$$T(v_1) = T(v_n) = v_1 + v_n \ \text{ y } \ T(v_i) = v_i, \text{ para cada } i \in \{2, ..., n-1\}.$$

   Demuestre que los valores propios de T son $0, 1$ y 2.

4. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

   a) Los valores propios de T son 1 y -1.
   b) $V = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$ es un subespacio propio de T.
   c) $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$.

   Entonces:

   a) Probar que T es diagonalizable.
   b) Encuentre una representación matricial de T.
   c) Calcular A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$, donde A es la representación matricial de T dada en el punto anterior.

Universidad Industrial de Santander

Examen Admisión
Maestría en Matemáticas
Febrero 05 de 2020
Escuela de Matemáticas

Nombre: ______________________________

ANÁLISIS

1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$. Demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

2. Demuestre que si $f\colon X \to R$ es continua y X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.

3. Analice la convergencia de la sucesión $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Demuestre que si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ and $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

5. a) Muestre que si f es uniformemente continua sobre $(a,b]$ y sobre $[b,c)$, entonces f es también uniformemente continua sobre (a,c).

   b) Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ y sea $f\colon \mathbf{A}\cup\mathbf{B} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua sobre $\mathbf{A}$ y sobre $\mathbf{B}$. ¿Necesariamente f es uniformemente continua sobre $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$?