Primera Capacitación Nivel Avanzado

Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Edumat

Bucaramanga, abril 10 de 2021

SCAN ME

Informes:
`olimpiadas.matematicas@uis.edu.co`
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

1. ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que $n!$ (el factorial de n) es divisible por 1540?
   Recuerde que para cada entero positivo n, el factorial de n es el número $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

(a) 13 (b) 17 (c) 11 (d) 19 (e) No sé

Observe que $1540 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 11$. Como el mayor primo que divide a 1540 es 11, entonces $n = 11$ es el menor entero positivo tal que $11! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \times 11$ es divisible por 1540.

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Álgebra

2. La suma de 50 enteros positivos consecutivos es 1775. ¿Cuál es la suma de los siguientes 100 enteros consecutivos?

(a) 11211 (b) 11312 (c) 10989 (d) 11050 (e) No sé

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Avanzado

Sean $n+1, n+2, n+3, \ldots, n+50$ los 50 enteros positivos consecutivos cuya suma es 1775, entonces

$$
\begin{aligned}
(n+1)+(n+2)+(n+3)\cdots+(n+50) &= 1775, \\
50n + (1+2+3+\cdots+50) &= 1775, \\
50n + \frac{50 \times 51}{2} &= 1775, \\
50n &= 500, \\
n &= 10.
\end{aligned}
$$

Luego el mayor de los números es $n+50 = 10+50 = 60$. Ahora sumemos los siguientes 100 enteros consecutivos, esto es:

$$
\begin{aligned}
(60+1)+(60+2)+\cdots+(60+100) &= 100 \times 60 + (1+2+\cdots+100), \\
&= 6000 + \frac{100 \times 101}{2}, \\
&= 11050.
\end{aligned}
$$

3. Sea p un polinomio tal que la suma de sus coeficientes es 10 y el coeficiente independiente (constante) es -2. Si además $p(x-3) = p(x-4) + 2a$, ¿cuál es el valor de a?

(a) 8 (b) 12 (c) 4 (d) 6 (e) No sé

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio. Note que la suma de sus coeficientes, se obtiene evaluando el polinomio en $x = 1$,

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

mientras que el coeficiente constante a_0 se obtiene al evaluar el polinomio en $x = 0$, pues $p(0) = a_0$. Dicho esto, del enunciado tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) &= 10, \\ p(0) &= -2. \end{aligned}$$

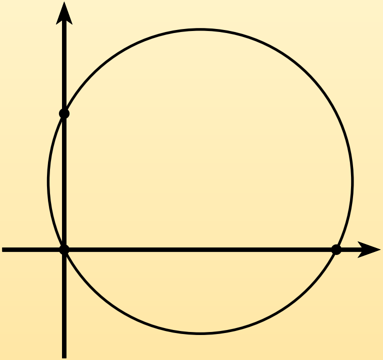
Además, reemplazando $x = 4$ en la ecuación $p(x-3) = p(x-4) + 2a$, se tiene:

$$\begin{aligned} p(4-3) &= p(4-4) + 2a, \\ p(1) &= p(0) + 2a \\ 10 &= -2 + 2a \\ 12 &= 2a, \end{aligned}$$

de donde $a = 6$.

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

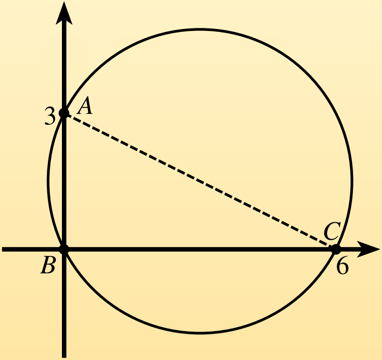
4. Se ha trazado una circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(6,0)$ y $(0,3)$ del plano cartesiano. ¿Cuál es el área que encierra esta circunferencia?



(a) 45π (b) $\frac{45}{4}\pi$ (c) $6\sqrt{5}\pi$ (d) $3\sqrt{5}\pi$ (e) No sé

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Avanzado

Considere la siguiente figura en la que $A = (0, 3)$, $B = (0, 0)$ y $C = (6, 0)$.



Note que el triángulo ABC es rectángulo en B y está inscrito en la circunferencia, por lo tanto su hipotenusa $\overline{AC}$ es un diámetro de la circunferencia. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que

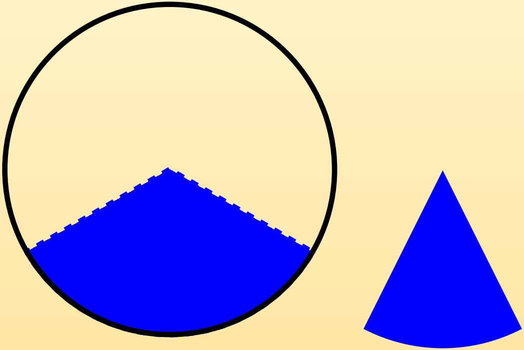
$$AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

luego el radio de la circunferencia es $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ y por lo tanto el área que encierra está dada por:

$$\pi \left(\frac{3\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{45}{4}\pi.$$

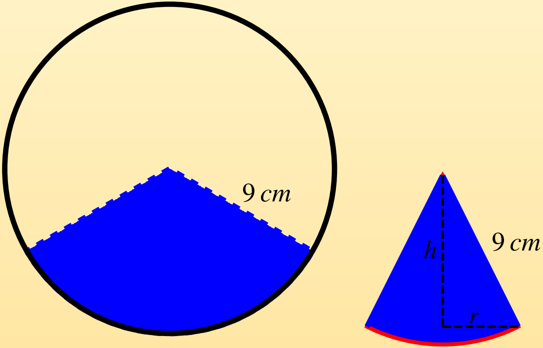
Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

5. Se recorta un sector circular correspondiente a un $\frac{1}{3}$ de un círculo de radio $9\,cm$, para formar un cono, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura de este cono?



$(a)\ 6\sqrt{2}\,cm$ $(b)\ 9\,cm$ $(c)\ 5\sqrt{2}\,cm$ $(d)\ 8\,cm$ (e) No sé

Considere la siguiente figura:



Note que el perímetro de la base del cono corresponde al arco barrido por sector circular recortado, y dado que este corresponde a $\dfrac{1}{3}$ del círculo, entonces el ángulo barrido, en radianes, es $\dfrac{2\pi}{3}$ y como el radio es $9\,cm$, se tiene que la longitud de la circunferencia de la base del cono es $9 \times \dfrac{2\pi}{3} = 6\pi$, de ahí que el radio de la base del cono es $r = 3\,cm$.
Finalmente, por el teorema de Pitágoras, tenemos que la altura del cono está dada por: $h = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}\,cm$.

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Álgebra

6. Si el número *abab* tiene exactamente 14 divisores positivos, ¿cuál es el valor de $2a + b$?

(a) 10 (b) 14 (c) 16 (d) 20 (e) No sé

Note que $14 = 2 \times 7 = (1+1)(6+1)$ y además,

$$abab = ab \times 100 + ab = 101 \times ab.$$

Dado que 101 es primo, entonces $ab = p^6$, con p un número primo, además ab es un número de dos cifras, luego $p = 2$, de ahí que $ab = 2^6 = 64$.
Por lo tanto $2a + b = 2(6) + 4 = 16$.

7. Sea n un entero positivo. Pruebe que si $(2^n)! = (x)(2^{2^n-1})$, entonces x es impar.

Despejando x tenemos que

$$x = \frac{(2^n)!}{2^{2^n-1}},$$

Observe que el exponente de 2 en la factorización prima de $(2^n)!$ está dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{2^n}{2} + \frac{2^n}{2^2} + \frac{2^n}{2^3} + \cdots + \frac{2^n}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2^n} &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^1 + 2^0, \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1}, \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{(2^n)!}{2^{2^n-1}} = \frac{2^{2^n-1} \times impar}{2^{2^n-1}} = impar.$$

8. Sea f una función cuyo dominio son los enteros positivos y codominio los números reales, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todo par de enteros positivos x, y. Si $f(2048) = 33$, ¿cuál es el valor de $f(16)$?

Observe que $2048 = 2^{11}$, luego

$$\begin{aligned}
f\left(2^{11}\right) &= f(\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{11 \textit{ veces } 2}) \\
&= \underbrace{f(2) + f(2) + \cdots + f(2)}_{11 \textit{ veces } f(2)} \\
&= 11 \times f(2) = 33,
\end{aligned}$$

de ahí que $f(2) = 3$. Ahora, $16 = 2^4$, luego

$$\begin{aligned}
f(16) = f(2^4) &= f(2 \times 2 \times 2 \times 2) \\
&= f(2) + f(2) + f(2) + f(2) \\
&= 4 \times f(2) \\
&= 4 \times 3 = 12.
\end{aligned}$$

GRACIAS!!!

Universidad
Industrial de
Santander