Primera Capacitación Nivel Básico

Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Edumat

Bucaramanga, abril 8 de 2021

SCAN ME

Informes:
`olimpiadas.matematicas@uis.edu.co`
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

1. En clase de matemáticas, cada estudiante debe dibujar un polígono y decir en voz alta el resultado de la suma del número de lados con el número de vértices. Juan dice: *¡trece!*, Natalia dice: *¡catorce!*, Pedro dice: *¡doce!* y Silvia dice: *¡veinte!* ¿Cuál de los estudiantes con seguridad no realizó correctamente el ejercicio?

(a) Natalia (b) Pedro (c) Silvia (d) Juan (e) No sé

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

1. En clase de matemáticas, cada estudiante debe dibujar un polígono y decir en voz alta el resultado de la suma del número de lados con el número de vértices. Juan dice: *¡trece!*, Natalia dice: *¡catorce!*, Pedro dice: *¡doce!* y Silvia dice: *¡veinte!* ¿Cuál de los estudiantes con seguridad no realizó correctamente el ejercicio?

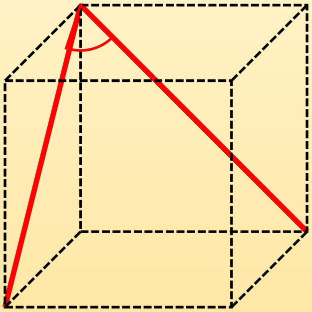
(a) Natalia (b) Pedro (c) Silvia (d) Juan (e) No sé

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Básico

En todo polígono el número de lados coincide con el número de vértices, por lo tanto la suma de estos dos números siempre es par. Pero Juan dice *¡trece!*, que es impar. De ahí que, con seguridad, Juan no realizó correctamente el ejercicio.

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

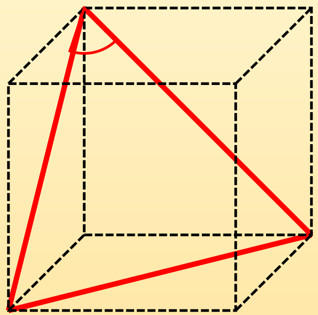
2. En la siguiente figura se muestra punteado un cubo y en línea continua dos de las diagonales de sus caras. ¿Cuál es la medida (en grados) del ángulo entre estas dos diagonales?



(a) 45 (b) 70 (c) 90 (d) 60 (e) No sé

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Básico

Considere la siguiente figura en la que se ha trazado la diagonal de la cara inferior del cubo en el dibujo del enunciado:



Note que el triángulo que se forma es equilátero, pues sus lados son diagonales de caras del cubo (cuadrados iguales). Por lo tanto, cada uno de los ángulos internos de este triángulo, en particular el ángulo pedido, miden 60°.

3. La clave del teléfono de Karen es un número de cuatro cifras que al ser multiplicado por 99999 se obtiene un número cuyas últimas cuatro cifras son 3579. ¿Cuál es la suma de las cifras de la clave de Karen?

(a) 12 (b) 13 (c) 24 (d) 16 (e) No sé

Sea $abcd$ la clave del teléfono de Karen. Note que:

$$\begin{aligned} abcd \times 99999 &= abcd \times (1000000 - 1) \\ &= abcd000000 - abcd \\ &= \cdots 3579. \end{aligned}$$

Reescribiendo la última igualdad en forma vertical tenemos:

$$\begin{array}{rr} & abcd000000 \\ - & abcd \\ \hline & \cdots 3579 \end{array}$$

De donde podemos deducir facilmente que $abcd = 6421$. Por lo tanto, la suma de las cifras de la clave de Karen es 13.

4. ¿Cuántos divisores positivos impares tiene el número 540?

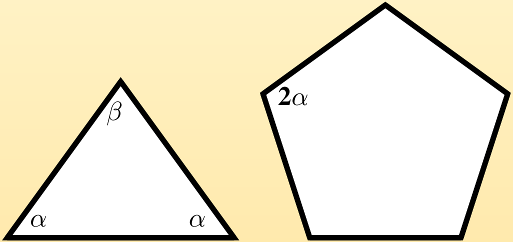
(a) 24 (b) 16 (c) 6 (d) 8 (e) No sé

Dado que $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$, entonces sus divisores positivos impares tienen la forma $d = 3^a \times 5^b$, donde $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $b \in \{0, 1\}$. Por lo tanto, 540 tiene $4 \times 2 = 8$ divisores positivos impares, a saber:

$$\begin{array}{ll} 3^0 \times 5^0 = 1, & 3^0 \times 5^1 = 5, \\ 3^1 \times 5^0 = 3, & 3^1 \times 5^1 = 15, \\ 3^2 \times 5^0 = 9, & 3^2 \times 5^1 = 45, \\ 3^3 \times 5^0 = 27, & 3^3 \times 5^1 = 135. \end{array}$$

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

5. En la siguiente figura se encuentra un triángulo isósceles y un pentágono regular. ¿Cuál es el valor de $\beta - \alpha$?



(a) 18° (b) 20° (c) 36° (d) 54° (e) No sé

Recuerde que la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono está dada por $180(n-2)$, donde n es el número de lados. Por lo tanto, la medida de cada ángulo interno del pentágono regular mide

$$\frac{180(5-2)}{5} = 108^\circ,$$

de ahí que $2\alpha = 108^\circ$, luego $\alpha = 54^\circ$. Además, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°, esto implica que

$$\begin{aligned} \beta + 2\alpha = \beta + 108^\circ &= 180^\circ, \\ \beta &= 72^\circ, \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\beta - \alpha = 72^\circ - 54^\circ = 18^\circ$.

6. Determine la suma de las cifras del mayor entero que al ser dividido por 40, su residuo es el triple que el respectivo cociente.

(a) 13 (b) 7 (c) 19 (d) tal entero no existe (e) No sé

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Básico

Sea n un número entero que al ser dividido por 40 deja como un residuo el triple del respectivo cociente. Entonces, por el algoritmo de la división se tiene que:

$$n = 40q + r,$$

donde q y r son enteros tales que $0 \leq r < 40$ y $r = 3q$. De lo anterior, tenemos:

$$n = 40q + 3q = 43q,$$

donde $0 \leq 3q < 40$. De modo que el mayor valor que puede tomar n se obtiene cuando $q = 13$. Así, el mayor entero n que cumple el requisito del enunciado es $n = 43 \times 13 = 559$, de ahí que la suma de sus cifras es 19.

7. Para cada entero positivo n, sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n, cada uno elevado a la posición que tiene de derecha a izquierda. Por ejemplo, $s(147) = 1^3 + 4^2 + 7$. ¿Cuántos enteros positivos cumplen que $s(n) = n$?

Sea n un entero positivo, entonces

$$n = a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1,$$

donde los dígitos a_i son las cifras de n en su representación decimal, esto es $0 \leq a_i \leq 9$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. De este modo,

$$s(n) = a_n^n + \cdots + a_3^3 + a_2^2 + a_1,$$

y término a término encontramos que $n \geq s(n)$ y que la igualdad solo se tiene para los números de una cifra.

Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Álgebra

8. El promedio de 30 números naturales consecutivos es $\frac{2021}{2}$. Determine el mayor de estos números.

Sean $n, n+1, n+2, \ldots, n+29$ los 30 números naturales consecutivos. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+29)}{30} &= \frac{2021}{2}, \\
n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+29) &= 30315, \\
30n+(0+1+2+3+\cdots+29) &= 30315, \\
30n+\frac{29(30)}{2} &= 30315, \\
30n &= 30315-435, \\
n &= 996.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el mayor de los números es $n+29=1025$.

GRACIAS!!!

Universidad
Industrial de
Santander