



# PRIMERA CAPACITACIÓN NIVEL MEDIO

## Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas  
Universidad Industrial de Santander  
Grupo Edumat

Bucaramanga, abril 9 de 2021



### *Informes:*

[olimpiadas.matematicas@uis.edu.co](mailto:olimpiadas.matematicas@uis.edu.co)

Tel.: 6344000 ext. 2316; 6450301.



*Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.*

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Álgebra

1. Un turno de un enfermero que combate el *COVID* – 19 es de 13 horas. Si el enfermero inicia su turno justo en el instante en el que el tiempo que falta para acabar el día, excede en 5 horas al tiempo transcurrido del día, ¿a qué hora terminará su turno?

- (a) 6 : 00 a.m. del día siguiente.
- (b) 7 : 00 p.m.
- (c) 10 : 30 p.m.
- (d) 9 : 30 a.m.
- (e) No sé

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Tome las horas del día desde 0 hasta 24. Sea  $x$  la hora del día en la que inicia el turno del enfermero. Del enunciado, tenemos que el tiempo que falta para acabar el día, excede en 5 horas al tiempo transcurrido del día, esto es  $24 - x = 5 + x$ , de donde  $x = 9.5$ ; luego el turno del enfermero inicia a las 9 : 30 a.m. y, dado que el turno es de 13 horas, entonces el enfermero terminará su turno a las 22 : 30 esto es, a las 10 : 30 p.m.

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Teoría de Números

2. Al dividir 337 entre el número natural  $n > 10$  el resto es 1. Entonces el resto que se obtiene al dividir 2020 entre  $n$  es:

(a) 1

(b) 3

(c) 4

(d) 5

(e) No sé

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

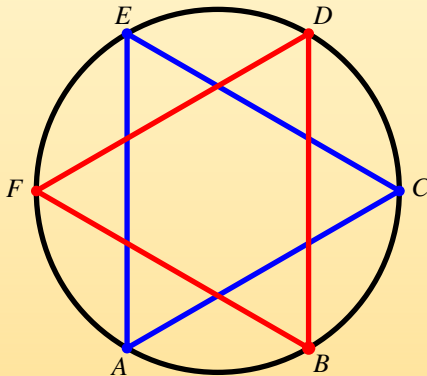
Por el Algoritmo de la división se tiene que  $337 = nq + 1$ , donde  $q$  es el cociente de la división de 337 entre  $n$ . Ahora, note que

$$\begin{aligned} 2020 &= 337 \times 5 + 335, \\ &= (nq + 1) \times 5 + 335, \\ &= 5nq + 5 + 335, \\ &= 5nq + \textcolor{blue}{337} + 3, \\ &= 5nq + \textcolor{blue}{nq} + \textcolor{blue}{1} + 3, \\ &= n(6q) + 4, \end{aligned}$$

de ahí que el resto que se obtiene al dividir 2020 entre  $n$  es 4.

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

3. En la siguiente figura, los triángulos  $\triangle AEC$  y  $\triangle BFD$  son equiláteros y tienen sus vértices sobre la circunferencia. Si área que encierra la circunferencia es  $16\pi \text{ cm}^2$  y el segmento  $\overline{DF}$  es paralelo a  $\overline{AC}$ , determine la distancia del punto  $F$  al punto  $A$ .



(a)  $2\text{ cm}$

(b) 16 cm

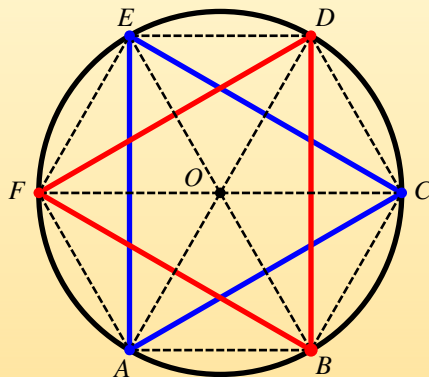
(c) 8 cm

(d) 4 cm

(e) No sé

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Considere la siguiente figura, en la que  $O$  es el centro del círculo.



# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Note que cada uno de los triángulos cuyos vértices son  $O$  y dos puntos consecutivos de los que están sobre la circunferencia, es equilátero.

Ahora, dado que el área que encierra la circunferencia es  $16\pi = (4)^2\pi \text{ cm}^2$ , entonces el radio de la circunferencia es  $4 \text{ cm}$ .

Por lo anterior,  $FO = 4 \text{ cm}$  y dado que el triángulo  $OFA$  es equilátero, entonces la distancia del punto  $F$  al punto  $A$  es  $FA = FO = 4 \text{ cm}$ .

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Teoría de Números

4. ¿De cuántas maneras pueden dormir seis palomas en 3 palomares, si en cada palomar caben como máximo 2 palomas?

(a) 60

(b) 180

(c) 90

(d) 30

(e) No sé

## Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Claramente en cada palomar deben dormir exactamente 2 palomas. Veamos de cuántas maneras se pueden organizar. Para el primer palomar, debemos escoger 2 de las 6 palomas, note que no importa el orden, luego esta escogencia la podemos hacer de

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times (6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = 15,$$

formas diferentes. Ahora, para el segundo palomar debemos escoger debemos escoger 2 de las 4 palomas que quedan, no importa el orden, luego esta escogencia la podemos hacer de

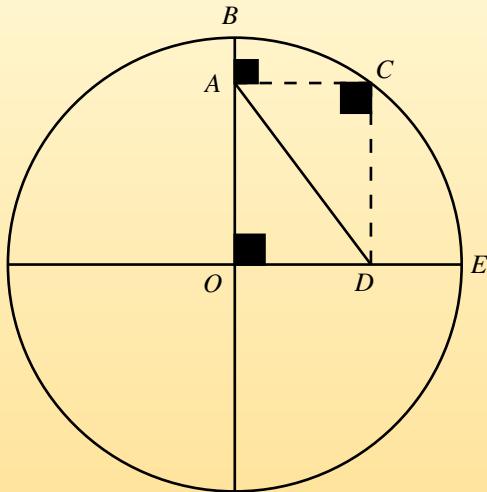
$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6,$$

formas diferentes; finalmente, en el tercer palomar irán las dos palomas restantes (una sola forma de escogerlas). Así, por el principio multiplicativo, el número de formas distintas en que pueden dormir las palomas en estos palomares es:

$$\underbrace{15 \text{ opc.}}_{\text{Palomar 1}} \times \underbrace{6 \text{ opc.}}_{\text{Palomar 2}} \times \underbrace{1 \text{ opc.}}_{\text{Palomar 3}} = \underbrace{90.}_{\text{formas}}$$

## Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Geometría

5. En la siguiente figura  $O$  es el centro del círculo,  $\overline{AD} = 25\text{ cm}$  y  $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ . ¿Cuál es el valor de  $\overline{DE}$ ?



# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Note que  $OC = AD = 25\text{ cm}$  y que  $\overline{OC}$  es un radio del círculo, luego

$$25\text{ cm} = OC = OB = OA + AB$$

$$25\text{ cm} = OA + 5\text{ cm},$$

esto es  $OA = 20\text{ cm}$ . Ahora, por el Teorema de Pitágoras:

$$AD^2 = OA^2 + OD^2$$

$$25^2 = 20^2 + OD^2$$

$$\sqrt{625 - 400} = OD$$

$$15\text{ cm} = OD.$$

De modo que

$$25\text{ cm} = OC = OE = OD + DE,$$

$$25\text{ cm} = 15\text{ cm} + DE,$$

$$10\text{ cm} = DE.$$

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Álgebra

6. En una población el 40% toma leche y el 30% come carne, además los que solo comen carne o solo toman leche son el 42%. ¿Cuál es el porcentaje de los que no toman leche ni comen carne?

(a) 44

(b) 28

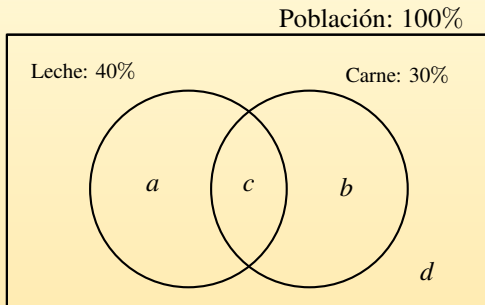
(c) 30

(d) 56

(e) No sé

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Considere el siguiente diagrama de Venn:



Del enunciado sabemos que:

$$a + b = 42\%$$

$$(a + c) + (b + c) = 40\% + 30\%$$

$$a + b + 2c = 70\%,$$

de ahí que  $c = 14\%$ . Luego,

$$d = 100\% - (a + b + c) = 100\% - 42\% - 14\% = 44\%.$$

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

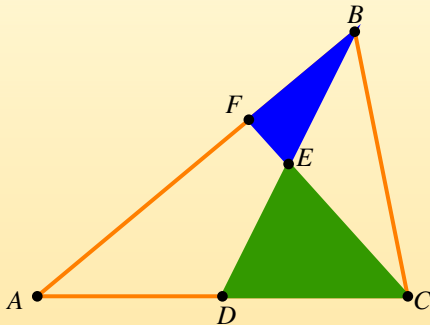
Por lo tanto, el porcentaje de los que no toman leche ni comen carne es 44%.  
Del enunciado y el diagrama de Venn se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} a + c & = & 40\% \\ b + c & = & 30\% \\ a + b & = & 42\% \\ \hline 2a + 2b + 2c & = & 112\% \\ a + b + c & = & 56\%, \end{array}$$

donde la cuarta ecuación se obtiene al sumar las tres primeras. Por lo tanto

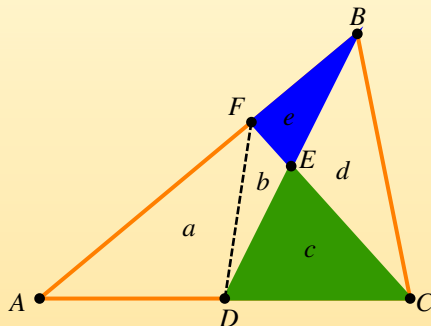
$$d = 100\% - (a + b + c) = 100\% - 56\% = 44\%.$$

7. Determine la razón entre el área verde y el área azul en la siguiente figura, sabiendo que  $D$  y  $E$  son los puntos medios de los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ , respectivamente.



# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Considere la siguiente figura:



Dado que  $E$  y  $D$  son los puntos medios de los segmentos  $\overline{BD}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente; entonces  $\overline{FE}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{FD}$  y  $\overline{BD}$  son medianas de los triángulos  $DFB$ ,  $DCB$ ,  $AFC$  y  $ABC$ , respectivamente.

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

De manera que, si  $a, b, c, d, e$  son las áreas de los respectivos triángulos, como se muestra en la figura, entonces, sabiendo que en un triángulo cualquiera cada mediana lo divide en dos triángulos con igual área, tenemos lo siguiente:

$$b = e$$

$$c = d$$

$$a = b + c$$

$$a + b + e = c + d.$$

Reemplazando las tres primeras ecuaciones en la cuarta tenemos:

$$(b + c) + e + e = c + c$$

$$e + c + e + e = 2c$$

$$3e = c.$$

Por lo tanto, la razón entre el área del triángulo  $EDC$  (verde) y el área del triángulo  $EBF$  (azul) es  $\frac{c}{e} = \frac{3e}{e} = 3$ .

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Teoría de Números

8. Si  $n$  es un número de dos cifras que tiene exactamente 12 divisores positivos y su cuadrado tiene exactamente 33 divisores positivos, ¿cuál es el número  $n$ ?

# Problemas Olimpiadas de Matemáticas-Nivel Medio

Observe que  $33 = 3 \times 11 = (2 + 1)(10 + 1)$ , entonces  $n^2 = p^2 q^{10}$ , de donde  $n = p \times q^5$ , con  $p$  y  $q$  números primos diferentes. Note que  $n$  tiene  $(1 + 1)(5 + 1) = 12$  divisores, como además tiene que ser de dos cifras, entonces  $p = 3$  y  $q = 2$ . Así,  $n = 3 \times 2^5 = 96$ .

GRACIAS!!!

Universidad  
Industrial de  
Santander

