Tercera Capacitación Nivel Medio

Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Edumat

Bucaramanga, mayo 27 de 2021

SCAN ME

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Principios elementales de Conteo

1. **Regla de la suma**: Si hay n_1 formas de realizar una primera tarea, n_2 formas de realizar una segunda tarea,..., y n_r formas de realizar la r-ésima tarea; y si las r tareas son incompatibles, entonces hay $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ formas de realizar una de las r tareas.

   Ejemplo: Supongamos que para elegir un representante de la facultad de ingeniería en una comisión se puede escoger bien un profesor ó bien un estudiante de doctorado. ¿De cuántas formas se puede escoger el representante sí hay 37 profesores y 83 estudiantes?.

Principios elementales de Conteo

1. **Regla de la suma**: Si hay n_1 formas de realizar una primera tarea, n_2 formas de realizar una segunda tarea,..., y n_r formas de realizar la r-ésima tarea; y si las r tareas son incompatibles, entonces hay $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ formas de realizar una de las r tareas.

   Ejemplo: Supongamos que para elegir un representante de la facultad de ingeniería en una comisión se puede escoger bien un profesor ó bien un estudiante de doctorado. ¿De cuántas formas se puede escoger el representante sí hay 37 profesores y 83 estudiantes?.

Principios elementales de Conteo

Solución: Hay 37 formas de elegir un profesor como representante y 83 formas de elegir un estudiante, por lo tanto hay $37 + 83 = 120$ formas de elegir como representante un estudiante ó un profesor.

Principios elementales de Conteo

2. **Regla del producto**: Supongamos que una tarea se puede dividir en r tareas consecutivas. Si hay n_1 formas de realizar la primer tarea, n_2 formas de realizar la segunda tarea, y así sucesivamente, n_r formas de realizar la r-ésima tarea, entonces hay $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ formas de completar la tarea.

   Ejemplo:
   Al viajar de Bucaramanga a Cali el señor Gómez desea parar en Ibagué. Si el viaje de Bucaramanga a Ibagué lo puede realizar en carro, moto ó avioneta y el viaje de Ibagué a Cali puede hacerlo en carro ó moto. ¿De cuántas maneras puede realizar su viaje el señor Gómez?

Principios elementales de Conteo

2. **Regla del producto**: Supongamos que una tarea se puede dividir en r tareas consecutivas. Si hay n_1 formas de realizar la primer tarea, n_2 formas de realizar la segunda tarea, y así sucesivamente, n_r formas de realizar la r-ésima tarea, entonces hay $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ formas de completar la tarea.

   Ejemplo:
   Al viajar de Bucaramanga a Cali el señor Gómez desea parar en Ibagué. Si el viaje de Bucaramanga a Ibagué lo puede realizar en carro, moto ó avioneta y el viaje de Ibagué a Cali puede hacerlo en carro ó moto. ¿De cuántas maneras puede realizar su viaje el señor Gómez?

Principios elementales de Conteo

Solución: El viaje consiste de dos tareas: Viajar de Bucaramanga a Ibagué y luego de Ibagué a Cali. El viaje de Bucaramanga a Ibagué lo puede realizar de 3 maneras y el de Ibagué a Cali lo puede realizar de 2 maneras. Por lo tanto, el viaje de Bucaramanga a Cali lo puede hacer de $3 \cdot 2 = 6$ formas.

Permutaciones

1. Sea $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Notaremos por PR_n^k al número de selecciones ordenadas con repetición de k elementos del conjunto X, se lee "*Permutaciones con repetición de n elementos tomados de k en k*". Es decir,

$$PR_n^k = |\{(a_1, a_2, \cdots, a_k) : a_i \in X; \ \ para \ \ i = 1, 2, \cdots, k\}|.$$

El número de permutaciones con repetición de n elementos tomados de k en k es n^k. Así,

$$PR_n^k = n^k.$$

Permutaciones

1. Sea $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Notaremos por PR_n^k al número de selecciones ordenadas con repetición de k elementos del conjunto X, se lee "*Permutaciones con repetición de n elementos tomados de k en k*". Es decir,

$$PR_n^k = |\{(a_1, a_2, \cdots, a_k) : a_i \in X; \ \ para \ \ i = 1, 2, \cdots, k\}|.$$

El número de permutaciones con repetición de n elementos tomados de k en k es n^k. Así,

$$PR_n^k = n^k.$$

Permutaciones

2. Ahora, notaremos por P_n^k al número de selecciones ordenadas sin repetición de k elementos del conjunto X, lo cual se lee "Permutaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k". Esto es,

$$P_n^k = |\{(a_1, a_2, \cdots, a_k) : a_i \in X; \;\; y \;\; a_i \neq a_j\}|.$$

El número de permutaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Es decir,

$$P_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Permutaciones

2. Ahora, notaremos por P_n^k al número de selecciones ordenadas sin repetición de k elementos del conjunto X, lo cual se lee "Permutaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k". Esto es,

$$P_n^k = |\{(a_1, a_2, \cdots, a_k) : a_i \in X; \;\; y \;\; a_i \neq a_j\}|.$$

El número de permutaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Es decir,

$$P_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Permutaciones

3. Notemos que como cada elemento puede aparecer a lo sumo una vez en la selección, entonces $k \leq n$. En particular, cuando $n = k$ tenemos las permutaciones de n elementos, el número de estas es $P_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$. Este número se representa por $n!$ y permite escribir P_n^k así,

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejemplo
¿De cuántas maneras podemos colocar 4 monedas de (500, 200, 100, 50) en fila?

Permutaciones

3. Notemos que como cada elemento puede aparecer a lo sumo una vez en la selección, entonces $k \leq n$. En particular, cuando $n = k$ tenemos las permutaciones de n elementos, el número de estas es $P_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$. Este número se representa por $n!$ y permite escribir P_n^k así,

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejemplo
¿De cuántas maneras podemos colocar 4 monedas de (500, 200, 100, 50) en fila?

Permutaciones

Solución: El problema consiste en contar el número de selecciones ordenadas de 4 elementos tomados de 4 en 4, es decir queremos hallar $P_4 = 4! = 24$.

Combinaciones

1. Sea $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Notaremos por C_n^k al número de selecciones no ordenadas sin repetición de k elementos del conjunto X (donde $k \leq n$), se lee "*Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k*,". Es decir,

$$C_n^k = |\{\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} : a_i \in X; \quad \text{y} \quad a_i \neq a_j\}|.$$

Combinaciones

2. Para contar cuántos elementos tiene el conjunto

$$\{\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} : a_i \in X; \quad \texttt{y} \quad a_i \neq a_j\},$$

consideremos por el momento todas las permutaciones sin repetición, o sea, $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, y agrupemos aquellas que solo se diferencian por el orden de los elementos; cada grupo contiene $k!$ permutaciones que representan la misma combinación, por lo tanto;

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!}$$

luego

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Combinaciones

Este número que aparece de manera frecuente en combinatoria, se simboliza por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

y se denomina ***coeficiente binomial***.

3. El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ coincide con el número de permutaciones de dos elementos en el que uno se repite k veces y el otro se repite $n-k$ veces. En efecto

$$P_2^{k,n-k} = \frac{(k+(n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Combinaciones

Este número que aparece de manera frecuente en combinatoria, se simboliza por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

y se denomina ***coeficiente binomial***.

3. El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ coincide con el número de permutaciones de dos elementos en el que uno se repite k veces y el otro se repite $n-k$ veces. En efecto

$$P_2^{k,n-k} = \frac{(k+(n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Combinaciones

El número de combinaciones (selecciones no ordenadas) sin repetición de n elementos tomados de k en k es $\frac{n!}{(n-k)!k!}$. Es decir,

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \text{con } \ 0 \leq k \leq n.$$

Ejercicios

1. Una heladería anuncia que se pueden elegir 5 diferentes confites para agregar a su helado, el cliente puede escoger no agregar confites o agregar uno o dos o tres o cuatro o cinco confites. ¿cuántas elecciones posibles tiene para su helado?

Combinaciones

El número de combinaciones (selecciones no ordenadas) sin repetición de n elementos tomados de k en k es $\frac{n!}{(n-k)!k!}$. Es decir,

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \text{con } \ 0 \leq k \leq n.$$

Ejercicios

1. Una heladería anuncia que se pueden elegir 5 diferentes confites para agregar a su helado, el cliente puede escoger no agregar confites o agregar uno o dos o tres o cuatro o cinco confites. ¿cuántas elecciones posibles tiene para su helado?

Ejercicios-Conteo

Solución: El número de formas de escoger i confites de las 5 opciones es $\binom{5}{i}$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, luego el número de selecciones corresponde a las formas de escoger cero o uno o dos o tres o cuatro o cinco confites, esto es

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

lo cual es igual a $2^5 = 32$.

2. ¿Cuántas placas de automóvil están disponibles si cada una contiene una serie de tres letras (de un alfabeto con 27 letras) seguidas de tres dígitos?

Ejercicios-Conteo

Solución: El número de formas de escoger i confites de las 5 opciones es $\binom{5}{i}$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, luego el número de selecciones corresponde a las formas de escoger cero o uno o dos o tres o cuatro o cinco confites, esto es

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

lo cual es igual a $2^5 = 32$.

2. ¿Cuántas placas de automóvil están disponibles si cada una contiene una serie de tres letras (de un alfabeto con 27 letras) seguidas de tres dígitos?

Ejercicios-Conteo

Solución: Hay 27 posibilidades por cada letra y 10 por cada dígito, de ahí que tenemos $27^3 \cdot 10^3$ placas disponibles.

3. ¿Cuántas funciones se pueden definir de un conjunto con m elementos en otro conjunto con n elementos?

Ejercicios-Conteo

Solución: Hay 27 posibilidades por cada letra y 10 por cada dígito, de ahí que tenemos $27^3 \cdot 10^3$ placas disponibles.

3. ¿Cuántas funciones se pueden definir de un conjunto con m elementos en otro conjunto con n elementos?

Ejercicios-Conteo

Solución: Una función corresponde con la elección de las n imágenes para cada uno de los m elementos del dominio. Luego, el número de funciones definidas de un conjunto con m elementos en un conjunto con n elementos es: $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m-veces} = n^m$.

4. Al lanzar dos dados, uno verde y uno azul. ¿Cuántas posibilidades hay de que la suma de los dos números sea mayor que 7?

Ejercicios-Conteo

Solución: Una función corresponde con la elección de las n imágenes para cada uno de los m elementos del dominio. Luego, el número de funciones definidas de un conjunto con m elementos en un conjunto con n elementos es: $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m-veces} = n^m$.

4. Al lanzar dos dados, uno verde y uno azul. ¿Cuántas posibilidades hay de que la suma de los dos números sea mayor que 7?

Ejercicios-Conteo

Solución: Si formamos todas las posibilidades que cumplan con la condición se tiene que

$$(2,6),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),$$

$$(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6).$$

En total son 15 posibilidades.

5. Un comité universitario formado por tres médicos, dos fisiólogos y cuatro psicólogos, estudia los efectos perjudiciales de las drogas. Si en un momento dado la universidad imparte una conferencia al respecto ¿De cuántas maneras puede el comité enviar un representante a dicho evento?.

Ejercicios-Conteo

Solución: Si formamos todas las posibilidades que cumplan con la condición se tiene que

$$(2,6),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),$$

$$(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6).$$

En total son 15 posibilidades.

5. Un comité universitario formado por tres médicos, dos fisiólogos y cuatro psicólogos, estudia los efectos perjudiciales de las drogas. Si en un momento dado la universidad imparte una conferencia al respecto ¿De cuántas maneras puede el comité enviar un representante a dicho evento?.

Ejercicios-Conteo

Solución: Dado que hay 3 formas de escoger un médico, 2 formas de escoger un fisiólogo y 4 formas de escoger un psicólogo, entonces hay $2 + 3 + 4 = 9$ formas de elegir al conferencista.

Referencias Bibliográficas

1. https://www.youtube.com/watch?v=Jov4LsifVe4

2. García, Francisco J. *Un pequeño manual para resolución de problemas*, Priego de Córdoba, 2002.

GRACIAS!!!

Universidad
Industrial de
Santander