



Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XVII Olimpiadas de Matemáticas UIS.
SECUNDARIA-2025.



¡PREPÁRATE PARA LAS OMU! DESAFÍO SEMANAL 2

Apreciado estudiante:

A continuación, te presentamos tres retos en distintos niveles de dificultad. La idea es que entrenes a tu propio ritmo y elijas el nivel que mejor se adapte a tu preparación.

Te invitamos a resolverlos, probar diferentes estrategias y discutir tus ideas con compañeros y profesores. Lo importante no es solo encontrar la respuesta, sino también descubrir formas ingeniosas y bien fundamentadas de llegar a ella.

¡Acepta el desafío y sigue entrenando tu lógica y creatividad matemática!

NIVEL BÁSICO: Estudiantes de un colegio.

El número de estudiantes en un colegio es 248. Si la cantidad de niños está entre 40 y 150 y es múltiplo de 7, y la cantidad de niñas es múltiplo de 13, ¿cuál es la diferencia entre el número de niñas y el número de niños?

NIVEL MEDIO: Algoritmo de la división.

Pedro suma 10 números enteros y al dividir el resultado entre 5 encuentra que el residuo es 3. Si ahora suma los inversos aditivos de dichos números, ¿cuál es el residuo de dividir este resultado entre 5?

NIVEL AVANZADO: Las potencias de 3

¿Cuál es la cifra de las unidades de 3^{57} ?

Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

@edumat.uis



SOLUCIONARIO

DESAFÍO SEMANAL 2

SOLUCIÓN NIVEL BÁSICO: Estudiantes de un colegio.

Dado que el total de estudiantes del colegio es 248, y la cantidad de niñas es un múltiplo de 13, se resta de 248 cada múltiplo de 13 y de estos resultados se observa cuál es un múltiplo de 7 que se encuentre entre 40 y 150. Siguiendo este procedimiento se encuentra que el número de niñas es $13 \times 11 = 143$ y el número de niños es $248 - 143 = 105 = 7 \times 15$. De modo que la diferencia entre el número de niñas y el número de niños es 38. ^a

^aTeorema de Congruencias

Si a , b y n son enteros, con $n > 0$, se dice que a es congruente con b módulo n (se escribe $a \equiv b \pmod{n}$) si n divide $a - b$. Esta propiedad permite establecer condiciones de divisibilidad en ecuaciones modulares, como se hizo en este ejercicio para asegurar que $248 - 13k$ sea divisible por 7.

SOLUCIÓN NIVEL MEDIO: Algoritmo de la división.

Sea S la suma de los diez números enteros. Como S deja residuo 3 cuando se divide entre 5, entonces $S = 5k + 3$, con k un número entero. Note que la suma de los inversos aditivos de estos números es $-S$, y además,

$$-S = -5k - 3 - 2 + 2 = 5(-k - 1) + 2.$$

Por lo tanto, el residuo que deja al dividirse $-S$ entre 5 es 2. ^a

^aAlgoritmo de la División

Para cualesquiera enteros a y b (con $b > 0$), existen únicos enteros q y r tales que $a = bq + r$, donde $0 \leq r < b$. Este resultado permite expresar cualquier entero como un múltiplo de b más un residuo, fundamento esencial para determinar el residuo en el proceso de división, como se aplicó en la solución anterior.

SOLUCIÓN NIVEL AVANZADO: Las potencias de 3.

Note que las primeras nueve potencias de 3 son:

- | | | |
|----------------|-----------------|-------------------|
| ■ $3^1 = 3$, | ■ $3^4 = 81$, | ■ $3^7 = 2187$, |
| ■ $3^2 = 9$, | ■ $3^5 = 243$, | ■ $3^8 = 6561$, |
| ■ $3^3 = 27$, | ■ $3^6 = 729$, | ■ $3^9 = 19683$. |

Así, las cifras de las unidades de las potencias de 3 entran en un ciclo cada cuatro potencias: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ...

Ahora bien, puesto que $5^7 = 78125$ deja residuo 1 al dividirse por 4, se tiene que la cifra de las unidades de 3^{5^7} corresponde con el primer término del ciclo, esto es, con 3. ^a

^aPeriodicidad de las potencias en módulo 10

Para cualquier entero a primo relativo con 10, se cumple que $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Esto implica que las cifras de las unidades de las potencias de a se repiten periódicamente con período divisor de 4. En particular, para $a = 3$, se tiene que $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, lo que determina el ciclo 3, 9, 7, 1, ... utilizado en la solución.

Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

 Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

 @edumat.uis

