Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XVII Olimpiadas de Matemáticas UIS.
SECUNDARIA-2025.

¡PREPÁRATE PARA LAS OMU!
DESAFÍO SEMANAL 6

Apreciado estudiante:

A continuación, te presentamos tres retos en distintos niveles de dificultad. La idea es que entrenes a tu propio ritmo y elijas el nivel que mejor se adapte a tu preparación.

Te invitamos a resolverlos, probar diferentes estrategias y discutir tus ideas con compañeros y profesores. Lo importante no es solo encontrar la respuesta, sino también descubrir formas ingeniosas y bien fundamentadas de llegar a ella.

¡Acepta el desafío y sigue entrenando tu lógica y creatividad matemática!

NIVEL BÁSICO. Tablero Mágico

En la primera casilla del tablero está escrito el número 30 y en la décima, el 2024.

30									2024

Complete el tablero escribiendo un número en cada casilla vacía, de modo que el número escrito en cada casilla, a partir de la tercera, sea igual a la suma de los números de las dos casillas inmediatamente anteriores.

NIVEL MEDIO. Rompecabezas

Un constructor desea cortar una varilla de 420 unidades de longitud, de tal manera que todas las piezas tengan longitudes diferentes y que la longitud de cada pieza, salvo la más pequeña, sea una unidad mayor que la longitud de la siguiente pieza más pequeña. Si la pieza más grande debe medir 30 unidades, ¿en cuántas piezas debe dividir la varilla el constructor?

NIVEL AVANZADO. El misterio de los coeficientes

Si la factorización del polinomio $x^3 - 2x^2 - 3x + 3$ es

$$(x-a)(x-b)(x-c),$$

¿cuál es el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 1229, 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solucionario
Desafío Semanal 6

Solución Nivel Básico.

Si llamamos x al valor de la segunda casilla, podemos rellenar las demás en términos de x:

30	x	$30+x$	$30+2x$	$60+3x$	$90+5x$	$150+8x$	$240+13x$	$390+21x$	2024

Así,

$$(240+13x)+(390+21x)=630+34x=2024,$$

luego $x=41$ y los números en cada casilla son:

30	41	71	112	183	295	478	773	1251	2024

Solución Nivel Medio.

Solución 1: Sea x la longitud de la pieza más pequeña y n el número de piezas en que se debe dividir la varilla, entonces:

$$x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+n-1) = 420, \quad (1)$$
$$x + n - 1 = 30. \quad (2)$$

De la ecuación (2) se tiene que $x = 31 - n$, luego de la ecuación (1) se sigue que:[a]

$$\begin{aligned}
\underbrace{x + x + x + \cdots + x}_{n\text{-veces}} + (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1) &= 420,\\
nx + \frac{(n-1)n}{2} &= 420,\\
n(31-n) + \frac{(n-1)n}{2} &= 420,\\
2n(31-n) + (n-1)n &= 840,\\
n^2 - 61n + 840 &= 0,\\
(n-21)(n-40) &= 0,
\end{aligned}$$

de donde $n = 21$ o $n = 40$, pero si $n = 40$, entonces $x = 31 - 40 = -9$, lo cual es imposible porque x es una longitud y debe ser positiva.
Por lo tanto, $n = 21$, esto es, el número de piezas en que debe dividirse la varilla es 21.

Solución 2: La suma de los números enteros del 1 al 30 es 465 y la diferencia de esta suma con 420 es 45, que es precisamente la suma de los números enteros del 1 al 9.
De modo que los enteros del 10 al 30 suman 420. De lo que se concluye que el número de piezas en que debe dividirse la varilla es 21 (la cantidad de enteros que hay en el intervalo desde el 10 hasta el 30).

[a] Sumatoria de Gauss. La suma de los primeros n enteros positivos está dada por la siguiente fórmula:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Por ejemplo, si deseas calcular la suma de los enteros consecutivos del 1 al 100, de una manera muy sencillas, puedes aplicar la fórmula con $n = 100$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100(101)}{2} = 5050.$$

Solución Nivel Avanzado.

Note que

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Del enunciado se tiene que:

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-3x+3 &= (x-a)(x-b)(x-c), \\ x^3-2x^2-3x+3 &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes:

$$\begin{aligned} -2 &= -(a+b+c), \\ -3 &= ab+ac+bc. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc) = 2^2-2(-3) = 10.$$