Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XVII Olimpiadas de Matemáticas UIS.
SECUNDARIA-2025.

Olimpiadas Matemáticas UIS

¡PREPÁRATE PARA LAS OMU!

DESAFÍO SEMANAL 7

Apreciado estudiante:

A continuación, te presentamos tres retos en distintos niveles de dificultad. La idea es que entrenes a tu propio ritmo y elijas el nivel que mejor se adapte a tu preparación.

Te invitamos a resolverlos, probar diferentes estrategias y discutir tus ideas con compañeros y profesores. Lo importante no es solo encontrar la respuesta, sino también descubrir formas ingeniosas y bien fundamentadas de llegar a ella.

¡Acepta el desafío y sigue entrenando tu lógica y creatividad matemática!

NIVEL BÁSICO. ¿Cuál era mi clave?

Alberto no recuerda los cuatro dígitos que forman la clave del candado de su bicicleta. Sin embargo, recuerda que al comparar las claves de sus amigos con la suya, la de Natalia tiene dos dígitos en común pero en diferente posición, al igual que la de Julián; la de Sara tiene solo dos dígitos en común, y están en la misma posición; y la de Sergio no tiene nada en común. Las claves de sus amigos son las siguientes:

Natalia	5 6 8 7
Julián	0 9 2 3
Sara	6 2 3 4
Sergio	9 0 8 1

¿Cuál es el último dígito de la clave de Alberto?

NIVEL MEDIO. Enteros consecutivos

¿Cuántos números enteros mayores que 1 y menores o iguales que 100 son divisibles por dos enteros consecutivos mayores que 1?

NIVEL AVANZADO. ¿Cuál es el residuo?

Edwin se quedó dormido sobre el teclado de su computadora y, al despertar, notó que había mantenido presionada la tecla 1. Como resultado, en la pantalla apareció un número compuesto exclusivamente por 2025 dígitos iguales a 1:

$$N = \underbrace{111111\ldots1111}_{2025 \text{ unos}}$$

Determine el residuo que deja N al dividirse entre los siguientes números:

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad 11.$$

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 1229, 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solucionario
Desafío Semanal 7

Solución Nivel Básico.

Dado que la clave de Alberto no tiene números en común con la de Sergio, entonces el último dígito de la clave de Alberto debe ser alguno de los siguientes: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Las claves de Natalia y Julián comparten dos números con la clave de Alberto, pero en diferente posición, luego se descartan el 3 y el 7 para la última cifra de la clave de Alberto.

La clave de Julián tiene dos dígitos en común, pero estos no pueden ser el 0 ni el 9 (porque están en la clave de Sergio), entonces los dígitos en común son el 2 y el 3, que también están en la clave de Sara, de ahí que el 4 no puede ser la última cifra de la clave de Alberto, porque de serlo la clave de Sara tendría 3 dígitos en común.

Tampoco pueden ser el 2 ni el 6, porque contradice la afirmación sobre la clave de Sara. Así, la única opción para el último dígito de la clave de Alberto es el 5.

De hecho, aunque el problema no pide la clave de Alberto, de la información dada se puede deducir que la clave es $7\,2\,3\,5$

Solución Nivel Medio.

Para resolver el problema, identificamos números entre 2 y 100 que sean divisibles por el mínimo común múltiplo (mcm) de pares de enteros consecutivos mayores que 1. Los pares considerados son: $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 7)$, $(7, 8)$, $(8, 9)$, $(9, 10)$ (las parejas del $(10, 11)$ en adelante porque su mcm es mayor que 100)

Paso 1: Calcular los mcm de cada par de números: Como son números consecutivos, su mcm será el producto de ellos mismos:

$$\begin{array}{rrrr} \text{mcm}(2,3) = 6, & \text{mcm}(3,4) = 12, & \text{mcm}(4,5) = 20, & \text{mcm}(5,6) = 30, \\ \text{mcm}(6,7) = 42, & \text{mcm}(7,8) = 56, & \text{mcm}(8,9) = 72, & \text{mcm}(9,10) = 90. \end{array}$$

Paso 2: Encontrar múltiplos de estos mcm en el rango 2–100:

- Múltiplos de 6: $6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96$.
- Múltiplos de 12: $12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96$.
- Múltiplos de 20: $20, 40, 60, 80, 100$.
- Múltiplos de 30: $30, 60, 90$.
- Múltiplos de 42: $42, 84$.
- Múltiplos de 56: 56.
- Múltiplos de 72: 72.
- Múltiplos de 90: 90.

Paso 3: Eliminar duplicados y listar todos los números diferentes:

$$6, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 72, 78, 80, 84, 90, 96, 100.$$

Paso 4: Contar los números válidos:
Total: 21 números.

Solución Nivel Avanzado.

Residuo al dividir entre 2: *El residuo de un número al dividirse entre 2 es el mismo residuo que deja su última cifra.*

Dado que el número $N = \underbrace{111111\ldots1111}_{2025 \text{ unos}}$ termina en 1, el residuo de N al dividirlo entre 2 es 1.

Residuo al dividir entre 3: *El residuo de un número al dividirse entre 3 es el mismo residuo que deja la suma de sus cifras.*

La suma de las cifras de N es 2025, y $2+0+2+5=9$ es múltiplo de 3, entonces N es un múltiplo de 3 y su residuo al dividirse entre 3 es 0.

Residuo al dividir entre 4: *El residuo de un número al dividirse entre 4 es el mismo residuo que deja el número formado por sus dos últimas cifras.*

Las dos últimas cifras de N forman el número 11, que deja residuo 3 al dividirse entre 4, entonces N deja residuo 3 al dividirse entre 4.

Residuo al dividir entre 5: *El residuo de un número al dividirse entre 5 es el mismo residuo que deja su última cifra.*

La última cifra de N es 1, que deja residuo 1 al dividirse entre 5, entonces N deja residuo 1 al dividirse entre 5.

Residuo al dividir entre 6: Dado que N deja residuo 1 al dividirse entre 2, entonces

$$N = 2k + 1,$$

y como deja residuo 0 al dividirse entre 3, entonces es de la forma

$$N = 3t,$$

donde k y t son los enteros del cociente de la división.

Multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, tenemos: $3N = 6k + 3$ y $2N = 6t$, restando estas dos últimas ecuaciones:

$$N = 6k + 3 - 6t = 6(k - t) + 3 = 6q + 3,$$

donde $q = k - t$ es un entero. Es decir, N es un múltiplo de 6, más 3, por lo tanto su residuo al dividirse entre 6 es 3.

Residuo al dividir entre 8: *El residuo de un número al dividirse entre 8 es el mismo residuo que deja el número formado por sus tres últimas cifras.*

Las tres últimas cifras de N forman el número 111, que deja residuo 7 al dividirse entre 8, entonces N deja residuo 7 al dividirse entre 8.

Residuo al dividir entre 9: *El residuo de un número al dividirse entre 9 es el mismo residuo que deja la suma de sus cifras.*

La suma de las cifras de N es 2025, y $2+0+2+5=9$ es múltiplo de 9, entonces N es un múltiplo de 9 y su residuo al dividirse entre 9 es 0.

Residuo al dividirse entre 10 *El residuo de un número al dividirse entre 10 es su última cifra.*

Dado que N termina en 1, el residuo de N al dividirlo entre 10 es 1.

Solución Nivel Avanzado. Continuación

Residuo al dividir entre 11: *El residuo de un número al dividirse entre 11 es el mismo residuo que deja la suma alternada de sus cifras.*

La suma alternada de las cifras de N es:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots+1-1+1=1.$$

Por lo tanto, el residuo de N al dividirse entre 11 es 1.

Residuo al dividirse entre 7 *El residuo de un número al dividirse entre 7 es el mismo residuo que deja la suma alternada de sus cifras en bloques de tres.*

Calculamos la suma alternada de las cifras de N en bloques de tres:

$$\underbrace{(111-111)+(111-111)+(111-111)+\cdots+(111-111)}_{337\text{ ceros}}+111=111.$$

Observamos que cada dos bloques de tres cifras se cancelan, es decir, cada 6 cifras la suma es cero. Como el número N tiene 2025 cifras, dividimos las 2025 cifras en grupos de 6:

$$2025=337(6)+3.$$

Esto significa que podemos formar 337 parejas de bloques de tres cifras que se anulan, y al final quedan las últimas tres cifras: 111.

Ahora, calculamos el residuo de 111 entre 7:

$$111\div 7=15 \text{ con residuo } \mathbf{6}.$$

Por lo tanto, el residuo que deja N al dividirse entre 7 es 6.

Resumiendo:

Divisor	Residuo
2	1
3	0
4	3
5	1
6	3
7	6
8	7
9	0
10	1
11	1