"Todo problema profana un misterio; a su vez, todo problema es profanado por la solución."
-Cioran.

MARATÓN OLÍMPICA

¡Prepárate para las Olimpiadas!

Consulta más material de estudio en el siguiente enlace:
http://matematicas.uis.edu.co/node/672

NIVEL BÁSICO

Problema 1.

Cuatro amigas de Gabriela están en la playa tomando el sol, cada una con lentes oscuros y tienen la siguiente conversación:

Sofía: Yo no tengo ojos verdes.

Karla: Yo no tengo ojos negros.

Elisa: Yo no tengo ojos azules.

María: Yo tengo ojos azules.

Si se sabe que solo una tiene ojos verdes y las demás tienen ojos azules, y que solo una de las cuatro amigas miente, ¿quién tiene ojos verdes?

Solución: Considere los siguientes casos:

Caso 1. *si Sofía miente entonces ella tiene los ojos verdes pero Elisa dice que no tiene ojos azules, lo cual es contradictorio pues solo una tiene ojos verdes y las otras ojos azules.*

Caso 2. *si Karla miente entonces ella tiene ojos negros, pero esto es imposible pues ninguna de ellas tiene ojos negros.*

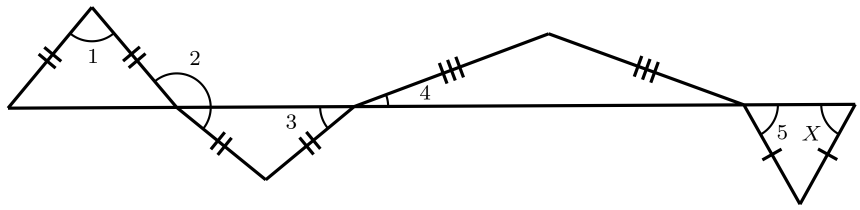
Caso 3. *si Elisa miente entonces ella tiene los ojos azules, Sofía y María también y por lo tanto los ojos de Karla serían verdes*

Caso 4. *si María miente entonces tiene los ojos verdes pero la única opción para Elisa que no tiene ojos azules también sería tenerlos verdes, lo cual es una contradicción.*

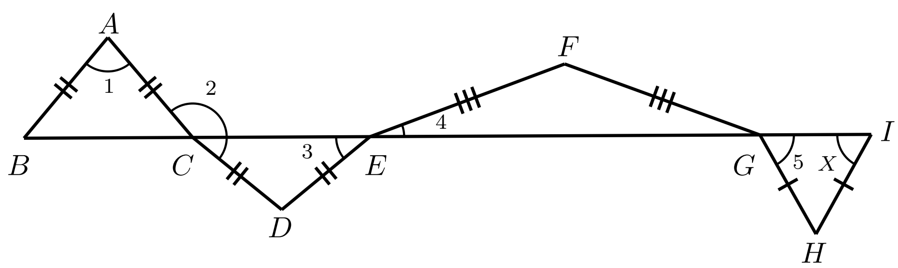
Por lo que se concluye que Elisa es quien miente, y Karla es la que tiene ojos verdes.

Problema 2.

En la siguiente figura todos los triángulos son isósceles como se indica en la figura. Si el ángulo 1 mide 80, el ángulo 2 mide 170, el ángulo 4 mide la mitad que el ángulo 3 y el ángulo 5 mide el triple que el ángulo 4, ¿cuánto mide el ángulo X?



Solución: *Considere la siguiente figura:*



El triángulo BAC es isósceles en A y el ángulo 1 mide 80, entonces $\measuredangle CBA = \measuredangle ACB = 50°$. De lo anterior obtenemos que $\measuredangle ECA = 130°$; luego $\measuredangle DCE = 170° - 130° = 40°$ y como el triángulo CDE es isósceles, entonces el ángulo 3 también mide 40. Del enunciado tenemos que el ángulo 4 tiene la mitad de la amplitud que el ángulo 3, así el ángulo 4 mide 20 y el ángulo 5 mide 60. Como el triángulo GHI es isósceles se concluye que el ángulo X mide $60°$.

Problema 3.

Con los dígitos $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ y 5, ¿cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden formar que sean múltiplos de 3?

Solución: *Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3; por lo tanto, las cifras de los números que cumplen las condiciones del enunciado deben pertenecer al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; o bien al conjunto $\{0, 1, 2, 4, 5\}$.*
Por el principio multiplicativo, con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$ podemos formar $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ números de cinco cifras diferentes; mientras que con los dígitos $0, 1, 2, 4, 5$; podemos formar $4\times4\times3\times2\times1 = 96$, puesto que el dígito 0 no puede estar en la cifra de las decenas de mil. De modo que, en total hay $120 + 96 = 216$ números con las condiciones dadas.

Nivel Medio

Problema 1.

Para los números reales a y b definimos la siguiente operación:

$$a \triangle b = \frac{b^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

Encuentre el valor de la siguiente expresión:

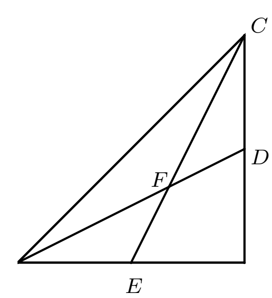
$$(\ldots(((20 \triangle 19) \triangle 18) \triangle 17) \ldots \triangle 1)$$

Solución: Sea $m = (\ldots(((20 \triangle 19) \triangle 18) \triangle 17) \ldots \triangle 2)$. *Entonces, de la definición de la operación* $\triangle$ *se tiene que*

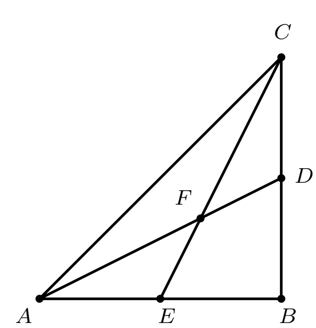
$$(\ldots(((20 \triangle 19) \triangle 18) \triangle 17) \ldots \triangle 1) = m \triangle 1 = \frac{1^2 - 1}{m^2 + 1} = 0.$$

Problema 2.

En la figura se muestra un triángulo rectángulo donde cada uno de sus catetos mide $1\,cm$. Si D y E son puntos medios de cada cateto, ¿cuál es el perímetro del triángulo CDF en centímetros?



Solución: Considere la siguiente figura:



Note que el triángulo ABC *además de ser rectángulo es isósceles en* B, *por lo tanto las medianas* $\overline{AD}$ *y* $\overline{CE}$ *son congruentes. Además, el punto* F *es el baricentro. De modo que* $CF = 2FE$ *y* $FE = FD$. *Ahora, por el Teorema de Pitágoras se tiene que:*

$$CE = \sqrt{CB^2 + EB^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ cm.$$

Finalmente, tenemos que el perímetro del triángulo CDF *es*[a]

$$\begin{aligned} CF + FD + DC &= CF + FE + DC \\ &= CE + DC \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ cm. \end{aligned}$$

[a] Al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se le conoce como el *número áureo* o *número de oro*, *número de Dios*, *razón áurea*, *razón dorada*, *media áurea*, *proporción áurea* o *divina proporción*.

Problema 3.

En una competencia participan 10 personas. ¿De cuántas formas se pueden dar las medallas de oro, plata y bronce, sabiendo que solo se permiten empates de hasta dos personas en el tercer puesto?

Solución: Utilizando el principio multiplicativo se tiene que:

$$\underbrace{10\ opciones}_{1\ Puesto} \times \underbrace{9\ opciones}_{2\ Puesto} \times \underbrace{n\ opciones}_{3\ Puesto} = \underbrace{10 \times 9 \times n = 2 \times 5 \times 3^2 \times n}_{formas\, de\, entregar\, las\, medallas}$$

Para determinar el valor de n, debemos tener en cuenta que en el tercer puesto se admite un solo empate, es decir, de las 8 personas que quedan, el tercer puesto puede ocuparlo o bien 1 persona, o bien 2 personas, esto es:[a]*, $n = \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 8 + 28 = 3^2 \times 2^2$. Así, el número de formas en que se pueden dar las medallas está dado por:*

$$2 \times 5 \times 3^2 \times n = 2 \times 5 \times 3^2 \times 3^2 \times 2^2 = 2^3 \times 3^4 \times 5.$$

[a] El número conmbinatorio o coeficiente binomial ${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k!)\cdot k!}$, da el número de formas en que se puede escoger k elementos de un conjunto con n elementos, sin importar el orden; en otras palabras, la cantidad de subconjuntos con k elementos que tiene un conjunto con n elementos.

Nivel Avanzado

Problema 1.

Sean a, b y c las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$. Determinar el valor de $(a + b + c)$ y de $a \times b \times c$.

Solución: Dado que a, b y c son las raíces del polinomio cúbico $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$ cuyo coeficiente líder es 1, por el Teorema Fundamental del Álgebra se tiene que

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Al resolver el producto del lado derecho de la igualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 3x - 8 &= (x^2 - (a + b)x + ab)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc, \end{aligned}$$

Así, igualando los coeficientes se tiene que: $a + b + c = 5$ y $a \times b \times c = 8$.

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Problema 2.

¿De cuántas formas se pueden comprar 10 caramelos en una tienda donde venden caramelos de 3 sabores?

Solución: Representamos los 10 *caramelos de la siguiente manera:*

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

y usaremos dos barras para separar los caramelos de diferentes sabores, por ejemplo, el siguiente arreglo indica que se compraron 5 *caramelos del sabor* A, 3 *del sabor* B *y* 2 *del sabor* C.

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet$$

También están permitidos casos como los que se ilustran a continuación:

$$|\,\bullet\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet: \text{ sabor } A:0, \text{ sabor } B:4, \text{ sabor } C:6.$$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\,||\,\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet: \text{ sabor } A:4, \text{ sabor } B:0, \text{ sabor } C:6.$$

Note que en total hay 12 *objetos (*10 *puntos y* 2 *barras) y cada caso diferente está determinado por la posición de las barras, luego se trata de contar de cuántas formas podemos ubicar las* 2 *barras en las* 12 *posiciones que determinan los objetos y esto se puede hacer de*

$$\binom{12}{2} = 66$$

formas diferentes.[a] *Por lo tanto el número de formas en que se pueden comprar* 10 *caramelos en una tienda que ofrece* 3 *sabores diferentes es* 66.

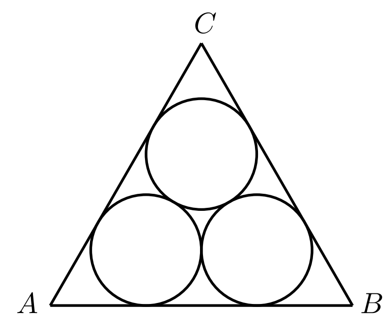
[a] En general, el número de formas en que se pueden separar n objetos en k categorías está dado por:

$$\binom{\text{objetos } + \text{ categorías } -1}{\text{categorías } -1} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

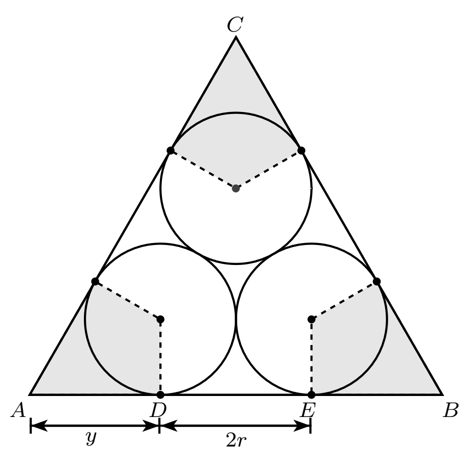
a este método se le conoce como Técnica de separadores.

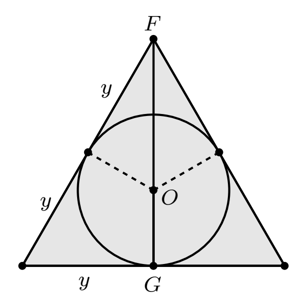
Problema 3.

En la siguiente figura las 3 circunferencias tienen radio r, son tangentes entre sí y al triángulo equilátero ABC. Determine el perímetro del triángulo en función de r.



Solución 1: Considere la siguiente gráfica en la que las regiones sombreadas de la figura de la izquierda se han juntado para formar la figura de la derecha.



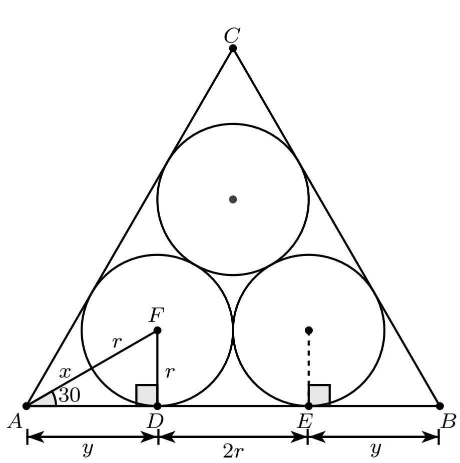


Note que el triángulo que se forma a la derecha es equilátero con lado $2y$, $\overline{FG}$ es una de sus medianas y O es su baricentro. De modo que por el teorema de medianas se tiene que $FO = 2OG = 2r$, luego $FG = 3r$ Así, por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$
\begin{aligned}
(2y)^2 - y^2 &= (3r)^2, \\
3y^2 &= 9r^2, \\
y &= r\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el perímetro del triángulo ABC está dado por: $6\left(r + r\sqrt{3}\right) = 6r\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Solución 2: Considere la siguiente figura en la que D y E son los puntos de tangencia de las respectivas circunferencias con el triángulo ABC. Sean $y = AD$ y x la longitud del segmento cuyos extremos son A y el punto de intersección del segmento $\overline{AF}$ con la circunferencia de centro en F.



Note que, como el triángulo ABC es equilátero, su perímetro está dado por $6(r + y)$. Hallemos y en términos de r.

Observe que el triángulo ADF es rectángulo en D, $DF = r$, $AF = x + r$ y $\measuredangle FAD = 30°$; luego

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2} &= \frac{r}{x + r}, \\
x + r &= 2r, \\
x &= r.
\end{aligned}
$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ADF se tiene que

$$y = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Luego el perímetro del triángulo ABC es:

$$6\left(r + r\sqrt{3}\right) = 6r\left(1 + \sqrt{3}\right).$$