Modelos algebraicos para la estabilización de micro-satélites

Joaquín Luna Torres

DIPLOMADO EN ALGEBRA LINEAL
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

mayo de 2018

Parte I

Introducción

Los satélites pequeños pueden realizar tareas complejas tales como fotografía especializada, vigilancia y comunicaciones y para ello es necesario controlar sus posiciones relativas (attitude) en el espacio. Para lograrlo es necesario conocer su posición en un momento dado en el espacio.

Los satélites pequeños pueden realizar tareas complejas tales como fotografía especializada, vigilancia y comunicaciones y para ello es necesario controlar sus posiciones relativas (attitude) en el espacio. Para lograrlo es necesario conocer su posición en un momento dado en el espacio. Los sistemas de navegación inerciales resultan demasiado grandes, pesados y costosos, lo cual hace necesario diseñar satélites pequeños (cubesat) y establecer controles que dependan de la menor información posible, por ejemplo de las posiciones relativas del sol, la tierra y del campo magnético de la tierra.

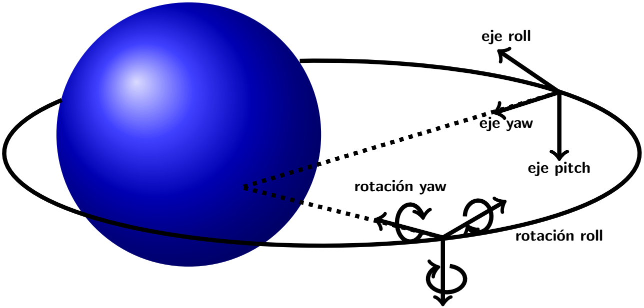
Los satélites pequeños pueden realizar tareas complejas tales como fotografía especializada, vigilancia y comunicaciones y para ello es necesario controlar sus posiciones relativas (attitude) en el espacio. Para lograrlo es necesario conocer su posición en un momento dado en el espacio. Los sistemas de navegación inerciales resultan demasiado grandes, pesados y costosos, lo cual hace necesario diseñar satélites pequeños (cubesat) y establecer controles que dependan de la menor información posible, por ejemplo de las posiciones relativas del sol, la tierra y del campo magnético de la tierra. En este trabajo se presentan los elementos matemáticos necesarios para describir la posición y orientación de un Cubesat una vez que esté en órbita: se trata de la descripción de los sistemas coordenados esenciales, las matrices de rotación de tales sistemas, los ángulos de Euler y los cuaterniones cuyos productos permiten expresar las rotaciones de manera más sencilla, eficiente y rápida.

Parte II

Sistemas de coordenadas para un cubesat

Un cuerpo rígido en un espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$, tiene $n(n+1)/2$ grados de libertad, de éstos n se utilizan para representar la posición y $n(n-1)/2$ son necesarios para representar la orientación. Un cubesat en $\mathbb{R}^3$ tiene 6 grados de libertad, de los cuales 3 sirven para representar la posición y los otros 3 son para representar la orientación (attitude).

Un cuerpo rígido en un espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$, tiene $n(n+1)/2$ grados de libertad, de éstos n se utilizan para representar la posición y $n(n-1)/2$ son necesarios para representar la orientación. Un cubesat en $\mathbb{R}^3$ tiene 6 grados de libertad, de los cuales 3 sirven para representar la posición y los otros 3 son para representar la orientación (attitude).



Sistemas de coordenadas

Para describir el movimiento de un cubesat, consideramos los siguientes sistemas de coordenadas:

Sistemas de coordenadas

Para describir el movimiento de un cubesat, consideramos los siguientes sistemas de coordenadas:

- ECI: Earth Centered Inertial Frame

Sistemas de coordenadas

Para describir el movimiento de un cubesat, consideramos los siguientes sistemas de coordenadas:

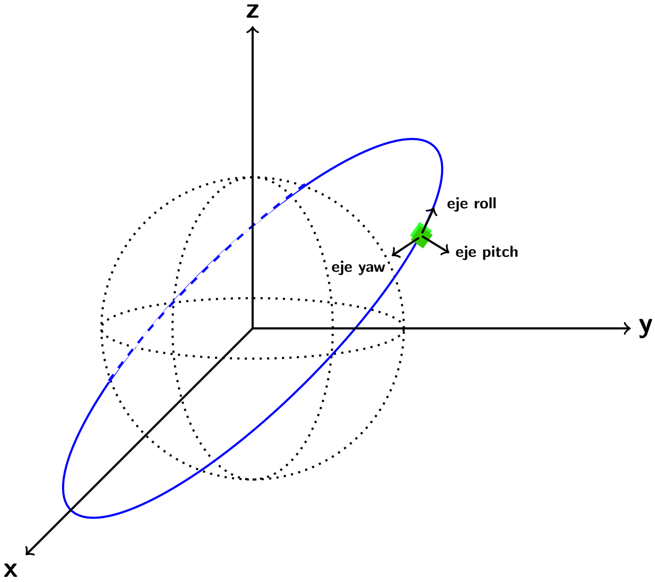
- ECI: Earth Centered Inertial Frame
  Es un sistema de referencia inercial para la navegación terrestre, esto significa que es un sistema que carece de aceleración y en él se pueden aplicar las leyes de Newton. Este sistema de referencia tiene su origen en el centro de la tierra, el eje x es paralelo a la linea que une el centro de la tierra con el "Vernal Equinox"(el punto donde la eclíptica cruza el ecuador terrestre yendo de sur a norte el primer dia de primavera) y apunta en la dirección de éste, la tierra rota alrededor del eje z y el eje y completa un sistema de coordenadas cartesianas siguiendo la regla de la mano derecha.
  Este sistema se denota I.

- ECEF: Earth-Centered Earth Fixed Reference Frame

- ECEF: Earth-Centered Earth Fixed Reference Frame
  Este sistema de coordenadas comparte su origen y el eje z con el sistema ECI y se denota por E. El eje x interseca la superficie de la tierra en el punto de latitud y longitud $(0,0)$, el eje y completa un sistema de coordenadas cartesianas siguiendo la regla de la mano derecha. El $ECEF$ rota con la tierra con una velocidad angular constante ω_E y, en consecuencia, no es un sistema inercial.

- ECEF: Earth-Centered Earth Fixed Reference Frame
  Este sistema de coordenadas comparte su origen y el eje z con el sistema ECI y se denota por E. El eje x interseca la superficie de la tierra en el punto de latitud y longitud $(0, 0)$, el eje y completa un sistema de coordenadas cartesianas siguiendo la regla de la mano derecha. El $ECEF$ rota con la tierra con una velocidad angular constante ω_E y, en consecuencia, no es un sistema inercial.
- NED: North East Down Reference Frame
  El sistema de coordenadas NED tiene su origen en la superficie de la tierra y se denota N. El eje x apunta hacia el norte en un plano tangente a la tierra, el eje y apunta hacia el este y el eje z hacia abajo y es perpendicular al plano tangente.

- O: Orbit Reference Frame
  El sistema de coordenadas orbital tiene su origen en el punto donde el satélite tiene su centro geométrico. El origen rota a una velocidad angular ω_0 con respecto al sistema ECI, el eje z apunta al centro de la tierra, el eje x apunta en la dirección del movimiento del satélite y es tangente a la órbita (es decir, perpendicular al radio vector y no tiene que ser paralelo al vector velocidad del satélite) y el eje y completa un sistema de coordenadas cartesianas siguiendo la regla de la mano derecha. La orientación (attitude) del satélite se describe por “roll”, “pitch” y “yaw” que son las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente. Este sistema se denota O y aparece a continuación:


z
eje roll
eje pitch
eje yaw
y
x

- OC: Earth centered orbit reference frame El sistema de coordenadas tiene su origen en centro de la tierra. El eje x tiene la dirección del perigeo (el punto de la órbita elíptica que recorre un cuerpo (natural o artificial) alrededor de la Tierra, en el cual dicho cuerpo se halla más cerca de su centro), el eje y se dirige a lo largo del eje semi-menor (la mitad de la longitud del eje menor de una elipse) y el eje z completa un sistema de coordenadas cartesianas siguiendo la regla de la mano derecha. Se denota OC.

- B: Body Reference Frame Este sistema comparte su origen con el sistema O y se denota por B. La rotación entre O y B se utiliza para representar la orientación del satélite. Sus ejes se definen localmente en el satélite con el origen en su centro de masa. El nadir (es decir, la intersección entre la vertical del observador y la esfera celeste, dicho de otra manera: si imaginamos una recta que pasa por el centro de la Tierra y por nuestra ubicación en su superficie, el nadir se encuentra sobre esa recta, por debajo de nuestros pies) es el eje z apuntando al centro de la tierra y los otro dos ejes son semejantes con los de O.

Parte III

Matrices de rotación para un cubesat

Matrices de rotación

Una matriz de rotación describe la relación rotacional entre dos sistemas de coordenadas, por lo tanto se utiliza para transformar un vector dado de un sistema de coordenadas en otro vector del segundo sistema. La matriz de rotación R_B^A transforma un vector ω_A descrito en un sistema de coordenadas A en otro vector ω_B descrito en un sistema B, esto es

Matrices de rotación

Una matriz de rotación describe la relación rotacional entre dos sistemas de coordenadas, por lo tanto se utiliza para transformar un vector dado de un sistema de coordenadas en otro vector del segundo sistema. La matriz de rotación R_B^A transforma un vector ω_A descrito en un sistema de coordenadas A en otro vector ω_B descrito en un sistema B, esto es

$$\omega_B = R_B^A \, \omega_A. \tag{1}$$

Matrices de rotación

Una matriz de rotación describe la relación rotacional entre dos sistemas de coordenadas, por lo tanto se utiliza para transformar un vector dado de un sistema de coordenadas en otro vector del segundo sistema. La matriz de rotación R_B^A transforma un vector ω_A descrito en un sistema de coordenadas A en otro vector ω_B descrito en un sistema B, esto es

$$\omega_B = R_B^A\, \omega_A. \tag{1}$$

Por ejemplo, para transformar un vector del "Body Reference Frame" en otro del "Earth centered orbit reference frame", la ecuación (1) se convierte en $\omega_{OC} = R_{OC}^{O}\, \omega_O$.

Para evitar ambiguedades con las matrices de rotación es necesario que $\omega_B = R_B^A \; R_A^B \; \omega_B$, Para evitar ambiguedades con las matrices de rotación es necesario que $\omega_B = R_B^A \; R_A^B \; \omega_B$, en consecuencia

$$R_B^A \; R_A^B = I \tag{2}$$

Para evitar ambiguedades con las matrices de rotación es necesario que $\omega_B = R_B^A\ R_A^B\ \omega_B$, en consecuencia

$$R_B^A\ R_A^B = I \tag{2}$$

donde I es la matriz idéntica. Esta ecuación implica que $R_B^A = \left(R_A^B\right)^{-1}$, también se puede probar que $R_B^A = \left(R_A^B\right)^T$ y que $\det R_B^A = 1$.

Para evitar ambiguedades con las matrices de rotación es necesario que $\omega_B = R_B^A \; R_A^B \; \omega_B$, en consecuencia

$$R_B^A \; R_A^B = I \tag{2}$$

donde I es la matriz idéntica. Esta ecuación implica que $R_B^A = \left(R_A^B\right)^{-1}$, también se puede probar que $R_B^A = \left(R_A^B\right)^T$ y que $\det R_B^A = 1$.

Por lo tanto, las matrices de rotación son elementos del grupo ortogonal especial $SO(3)$ definido por

$$SO(3) = \{R \mid R \in \mathbb{R}^{3\times 3}, R^T R = I \text{ y } \det R = 1\}. \tag{3}$$

Ángulos de Euler

Una manera, la más usual, de encontrar los elementos de una matriz de rotación es usando los **ángulos de Euler**. por consiguiente, vamos a definir estos ángulos en un punto y con ellos a construir las matrices de rotación.

Ángulos de Euler

Una manera, la más usual, de encontrar los elementos de una matriz de rotación es usando los **ángulos de Euler**. por consiguiente, vamos a definir estos ángulos en un punto y con ellos a construir las matrices de rotación. Podemos expresar la transformación de un sistema de coordenadas en otro por medio de tres rotaciones sucesivas ejecutadas en un orden determinado; los ángulos de Euler son entonces los tres ángulos sucesivos de rotación.

Cálculo de los ángulos de Euler

Expresaremos la transformación de un sistema de coordenadas en otro por medio de tres rotaciones sucesivas ejecutadas en un orden determinado;

Cálculo de los ángulos de Euler

Expresaremos la transformación de un sistema de coordenadas en otro por medio de tres rotaciones sucesivas ejecutadas en un orden determinado; los ángulos de Euler son los tres ángulos sucesivos de rotación.

Cálculo de los ángulos de Euler

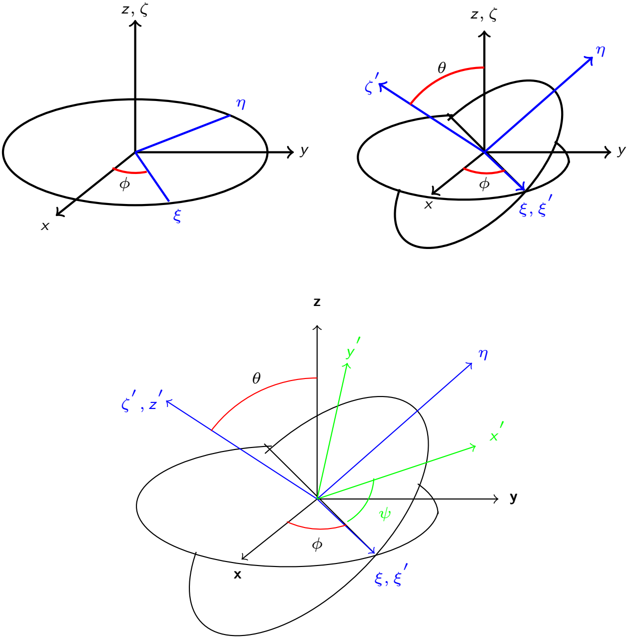
Expresaremos la transformación de un sistema de coordenadas en otro por medio de tres rotaciones sucesivas ejecutadas en un orden determinado; los ángulos de Euler son los tres ángulos sucesivos de rotación. Iniciamos rotando el sistema de coordenadas *xyz* en un ángulo ϕ alrededor del eje *z* y en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj para llegar a otro sistema de coordenadas que denotamos $\xi\eta\zeta$.

Cálculo de los ángulos de Euler

Expresaremos la transformación de un sistema de coordenadas en otro por medio de tres rotaciones sucesivas ejecutadas en un orden determinado; los ángulos de Euler son los tres ángulos sucesivos de rotación. Iniciamos rotando el sistema de coordenadas *xyz* en un ángulo ϕ alrededor del eje *z* y en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj para llegar a otro sistema de coordenadas que denotamos $\xi\eta\zeta$. Luego rotamos éste en un ángulo θ alrededor del eje ξ en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj para llegar a un nuevo sistema de coordenadas que denotamos $\xi^{'}\eta^{'}\zeta^{'}$. el eje $\eta^{'}$ está en la intersección de los planos *xy* y $\xi^{'}\zeta^{'}$ y se conoce como línea de los nodos.

Cálculo de los ángulos de Euler

Expresaremos la transformación de un sistema de coordenadas en otro por medio de tres rotaciones sucesivas ejecutadas en un orden determinado; los ángulos de Euler son los tres ángulos sucesivos de rotación. Iniciamos rotando el sistema de coordenadas xyz en un ángulo ϕ alrededor del eje z y en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj para llegar a otro sistema de coordenadas que denotamos $\xi\eta\zeta$. Luego rotamos éste en un ángulo θ alrededor del eje ξ en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj para llegar a un nuevo sistema de coordenadas que denotamos $\xi^{'}\eta^{'}\zeta^{'}$. el eje $\eta^{'}$ está en la intersección de los planos xy y $\xi^{'}\zeta^{'}$ y se conoce como línea de los nodos. Finalmente, rotamos el sistema $\xi^{'}\eta^{'}\zeta^{'}$ en un ángulo ψ alrededor del eje $\zeta^{'}$ en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj para producir el sistema de coordenadas buscado que denotaremos $x^{'}y^{'}z^{'}$.


z, ζ
η
y
ϕ
x
ξ
z, ζ
θ
ζ′
η
y
ϕ
x
ξ, ξ′
z
y′
η
θ
ζ′, z′
x′
y
ψ
ϕ
x
ξ, ξ′

Los elementos de la transformación completa $\mathbf{A}$ se obtienen multiplicando las tres matrices correspondientes a las rotaciones anteriores, cada una de las cuales tiene una forma relativamente simple. Específicamaente, la rotación inicial alrededor del eje z se describe por una matriz $\mathbf{R}_z$:

$$\xi = \mathbf{R_z x},$$

Los elementos de la transformación completa $\mathbf{A}$ se obtienen multiplicando las tres matrices correspondientes a las rotaciones anteriores, cada una de las cuales tiene una forma relativamente simple. Específicamaente, la rotación inicial alrededor del eje z se describe por una matriz $\mathbf{R}_z$:

$$\xi = \mathbf{R_z x},$$

donde ξ y $\mathbf{x}$ son matrices columnas. De manera semejante, la transformación de $\xi\eta\zeta$ a $\xi^{'}\eta^{'}\zeta^{'}$ se describe por una matriz $\mathbf{R}_y$,

$$\xi^{'} = \mathbf{R_y}\xi,$$

Los elementos de la transformación completa **A** se obtienen multiplicando las tres matrices correspondientes a las rotaciones anteriores, cada una de las cuales tiene una forma relativamente simple. Específicamaente, la rotación inicial alrededor del eje z se describe por una matriz $\mathbf{R}_z$:

$$\xi = \mathbf{R_z x},$$

donde ξ y **x** son matrices columnas. De manera semejante, la transformación de $\xi\eta\zeta$ a $\xi^{'}\eta^{'}\zeta^{'}$ se describe por una matriz $\mathbf{R}_y$,

$$\xi^{'} = \mathbf{R_y}\xi,$$

y la última rotación a $x^{'}y^{'}z^{'}$ por una matriz $\mathbf{R}_x$,

$$\mathbf{x}^{'} = \mathbf{R_x}\xi^{'}.$$

En consecuencia, la transformación completa es

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{R_x}\mathbf{R_y}\mathbf{R_z}.$$

En consecuencia, la transformación completa es

$$\mathbf{x}^{'} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{R_x}\mathbf{R_y}\mathbf{R_z}.$$

Ahora, como la rotación de puntos del plano se describen matricialmente por

$$D = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix},$$

es claro que en el caso tridimensional se debe tener que la transformación $\mathbf{R}_x$ que corresponde a una rotación alrededor de x tiene como matriz a

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}. \tag{4}$$

es claro que en el caso tridimensional se debe tener que la transformación $\mathbf{R}_x$ que corresponde a una rotación alrededor de x tiene como matriz a

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}. \tag{4}$$

la transformación $\mathbf{R}_y$ que corresponde a una rotación alrededor de ξ tiene como matriz a

$$\mathbf{R_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

y, finalmente, la rotación $\mathbf{R}_z$ alrededor de ζ' tiene como matriz a

$$\mathbf{R_z} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

y, finalmente, la rotación $\mathbf{R}_z$ alrededor de ζ' tiene como matriz a

$$\mathbf{R_z} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

De esta manera, la matriz producto $\mathbf{A} = \mathbf{R_x}\mathbf{R_y}\mathbf{R_z}$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c\ \psi\ c\ \theta & -s\ \psi\ c\ \phi +\ c\ \psi\ s\ \theta\ s\ \phi & s\ \psi\ s\ \phi + c\ \psi\ s\ \theta\ c\ \phi \\ s\ \psi\ c\ \theta & c\ \psi\ c\ \phi +\ s\ \theta\ s\ \phi\ s\ \psi & -c\ \psi\ s\ \phi + s\ \psi\ s\ \theta c\ \phi \\ -s\ \theta & c\ \theta\ s\ \phi & c\ \theta\ c\ \phi \end{bmatrix} \tag{7}$$

y, finalmente, la rotación $\mathbf{R}_z$ alrededor de ζ' tiene como matriz a

$$\mathbf{R_z} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

De esta manera, la matriz producto $\mathbf{A} = \mathbf{R_x R_y R_z}$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c\ \psi\ c\ \theta & -s\ \psi\ c\ \phi + \ c\ \psi\ s\ \theta\ s\ \phi & s\ \psi\ s\ \phi + c\ \psi\ s\ \theta\ c\ \phi \\ s\ \psi\ c\ \theta & c\ \psi\ c\ \phi + \ s\ \theta\ s\ \phi\ s\ \psi & -c\ \psi\ s\ \phi + s\ \psi\ s\ \theta c\ \phi \\ -s\ \theta & c\ \theta\ s\ \phi & c\ \theta\ c\ \phi \end{bmatrix} \tag{7}$$

donde se utiliza la notación abreviada $c\ = \cos$ y $s\ = \sin$.

y, finalmente, la rotación $\mathbf{R}_z$ alrededor de ζ' tiene como matriz a

$$\mathbf{R_z} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

De esta manera, la matriz producto $\mathbf{A} = \mathbf{R_x R_y R_z}$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c\ \psi\ c\ \theta & -s\ \psi\ c\ \phi +\ c\ \psi\ s\ \theta\ s\ \phi & s\ \psi\ s\ \phi + c\ \psi\ s\ \theta\ c\ \phi \\ s\ \psi\ c\ \theta & c\ \psi\ c\ \phi +\ s\ \theta\ s\ \phi\ s\ \psi & -c\ \psi\ s\ \phi + s\ \psi\ s\ \theta c\ \phi \\ -s\ \theta & c\ \theta\ s\ \phi & c\ \theta\ c\ \phi \end{bmatrix} \tag{7}$$

donde se utiliza la notación abreviada $c\ = \cos$ y $s\ = \sin$. Cuando las matrices de rotación se usan para representar orientaciones (attitude), seis de sus nueve parámetros son redundantes, por lo tanto es necesario utilizar otras estrategias para su representación, esto se logra mediante los parámetros de Euler o los cuaterniones.

Parte IV

Gimbal lock

Estudiemos antes un problema que apareció en las misiones espaciales “Apollo”: Un “gimbals”(cojinete) es un anillo suspendido que puede rotar alrededor de un eje. Típicamente estos cojinetes se anidan uno dentro del otro para producir rotaciones en ejes diferentes.

Estudiemos antes un problema que apareció en las misiones espaciales “Apollo”: Un “gimbals”(cojinete) es un anillo suspendido que puede rotar alrededor de un eje. Típicamente estos cojinetes se anidan uno dentro del otro para producir rotaciones en ejes diferentes.
Algunos sistemas coordenados en matemáticas se comportan como cojinetes reales y se usan para medir ángulos, esto sucede, particularmente, con los Ángulos de Euler.

Estudiemos antes un problema que apareció en las misiones espaciales “Apollo”: Un “gimbals”(cojinete) es un anillo suspendido que puede rotar alrededor de un eje. Típicamente estos cojinetes se anidan uno dentro del otro para producir rotaciones en ejes diferentes.
Algunos sistemas coordenados en matemáticas se comportan como cojinetes reales y se usan para medir ángulos, esto sucede, particularmente, con los Ángulos de Euler.
El “gimbal lock” es la pérdida de un grado de libertad en el espacio tridimensional que ocurre cuando los ejes de dos de los tres cojinetes del sistema ocupan una posición paralela, lo cualda la apariencia de tener rotaciones en un espacio bidimensional.

En el caso tridimensional, consideremos una plataforma sensora de nivel en una nave espacial que vuela hacia el norte con sus tres ejes mutuamente perpendiculares (es decir la medida de cada uno de los ángulos “roll”, “pitch” y “yaw” es cero), tal como aparece en el lado izquierdo de la figura anterior. Si la nave se lanza hacia arriba, los ejes “roll” y “yaw” de la plataforma aparecen paralelos (parte derecha de la figura anterior).

En el caso tridimensional, consideremos una plataforma sensora de nivel en una nave espacial que vuela hacia el norte con sus tres ejes mutuamente perpendiculares (es decir la medida de cada uno de los ángulos "roll", "pitch" y "yaw" es cero), tal como aparece en el lado izquierdo de la figura anterior. Si la nave se lanza hacia arriba, los ejes "roll" y "yaw" de la plataforma aparecen paralelos (parte derecha de la figura anterior).

Un incidente de "gimbal lock" bien conocido sucedió en la misión lunar "Apollo 11" en la cual usaron un conjunto de cojinetes en un "inertial measurement unit (IMU)". Fue necesario mover manualmente la nave para sacarla de la posición "Gimbal lock".

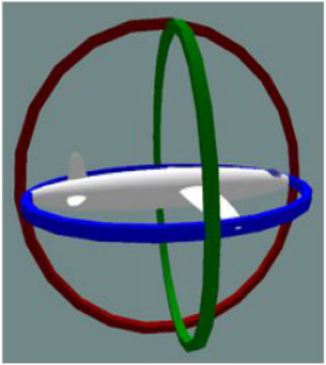
Un "gimbal lock" ocurre por que la función que relaciona los Ángulos de Euler con Rotaciones (en términos topológicos, la función sobreyectiva con dominio el toro tridimensional T^3 y codominio el espacio real proyectivo RP^3, homeomorfo a $SO(3)$ y con grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$ no es un revestimiento, ya que no es un homeomorfismo local en cada uno de sus puntos, Un “gimbal lock” ocurre por que la función que relaciona los Ángulos de Euler con Rotaciones (en términos topológicos, la función sobreyectiva con dominio el toro tridimensional T^3 y codominio el espacio real proyectivo RP^3, homeomorfo a $SO(3)$ y con grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$ no es un revestimiento, ya que no es un homeomorfismo local en cada uno de sus puntos, y por lo tanto en algunos puntos el rango (grados de libertad) es menor que 3.

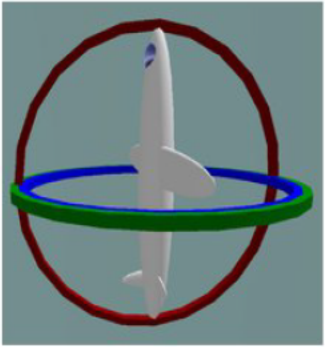
Un "gimbal lock" ocurre por que la función que relaciona los Ángulos de Euler con Rotaciones (en términos topológicos, la función sobreyectiva con dominio el toro tridimensional T^3 y codominio el espacio real proyectivo RP^3, homeomorfo a $SO(3)$ y con grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$ no es un revestimiento, ya que no es un homeomorfismo local en cada uno de sus puntos, y por lo tanto en algunos puntos el rango (grados de libertad) es menor que 3.

Los Ángulos de Euler pemiten dar una descripción numérica de las rotaciones en el espacio tridimensional, pero esta descripción no solamente no es única sino que existen puntos donde no todo cambio en el espacio base (rotaciones) es consecuencia de un cambio en el espacio total (Ángulos de Euler).

Esta es una restricción topológica:

Esta es una restricción topológica:
No existen revestimientos de T^3 sobre RP^3; se logran revestimientos no triviales cuando el espacio total es la esfera tridimensional S^3, que es el grupo $Spin(3)$ y este se obtiene usando cuaterniones unitarios. Por esta razón es bien importante utilizar cuaterniones para describir rotaciones y posiciones relativas (attitude) en el espacio de los satélites artificiales.





¿Qué pasa con las matrices de rotación?

Si rotamos $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $R = R_x R_y R_z$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Qué pasa con las matrices de rotación?

Si rotamos $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $R = R_x R_y R_z$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Qué pasa con las matrices de rotación?

Si rotamos $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $R = R_x R_y R_z$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) & 0 \\ -\cos(\phi+\psi) & \sin(\phi+\psi) & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué pasa con las matrices de rotación?

Si rotamos $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $R = R_x R_y R_z$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) & 0 \\ -\cos(\phi+\psi) & \sin(\phi+\psi) & 0 \end{bmatrix}$$

¡La matriz $R_{\frac{\pi}{2}}$ es una rotación alrededor del eje z y los cambios de ϕ y ψ producen el mismo efecto!

Parte V

Cuaterniones

Los Cuaterniones son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos. Mientras que los números complejos son una extensión de los reales por la adición de la unidad imaginaria i, tal que $i^2 = -1$, los cuaterniones son una extensión generada de manera análoga añadiendo las unidades imaginarias: i, j y k a los números reales de manera que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Esto se puede resumir en una tabla de multiplicación:

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Entonces un cuaternión es un número de la forma

$$\omega = a + bi + cj + dk = [a, b, c, d], \tag{8}$$

donde a, b, c y d son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión.

donde a, b, c y d son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión.
Los cuaterniones, además de la forma de la ecuación (8), se suelen escribir como $[\eta, \mathbf{v}]$, donde $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

donde a, b, c y d son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión.
Los cuaterniones, además de la forma de la ecuación (8), se suelen escribir como $[\eta, \mathbf{v}]$, donde $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.
La multiplicación de los cuaterniones no es conmutativa: $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$. Los cuaterniones son un ejemplo de cuerpo asimétrico: una estructura algebraica parecida a un campo pero cuya multimplicación no es conmutativa. La multiplicación es asociativa y todo cuaternión no nulo posee un único inverso.

donde a, b, c y d son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión.

Los cuaterniones, además de la forma de la ecuación (8), se suelen escribir como $[\eta, \mathbf{v}]$, donde $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

La multiplicación de los cuaterniones no es conmutativa: $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$. Los cuaterniones son un ejemplo de cuerpo asimétrico: una estructura algebraica parecida a un campo pero cuya multimplicación no es conmutativa. La multiplicación es asociativa y todo cuaternión no nulo posee un único inverso. Forman un álgebra asociativa cuatridimensional sobre los números reales y los complejos forman un subconjunto de ella, los cuaterniones no forman un álgebra asociativa sobre los complejos.

La norma de un cuaternión $z = a + bi + cj + dk$ se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

La norma de un cuaternión $z = a + bi + cj + dk$ se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.
Usando la función distancia definida como $d(z, w) = |z - w|$, los cuaterniones forman un espacio métrico en el que todas las operaciones aritméticas son continuas.

La norma de un cuaternión $z = a + bi + cj + dk$ se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.
Usando la función distancia definida como $d(z, w) = |z - w|$, los cuaterniones forman un espacio métrico en el que todas las operaciones aritméticas son continuas.
También tenemos que $|zw| = |z||w|$ para cuaterniones z y w arbitrarios.

La norma de un cuaternión $z = a + bi + cj + dk$ se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.
Usando la función distancia definida como $d(z, w) = |z - w|$, los cuaterniones forman un espacio métrico en el que todas las operaciones aritméticas son continuas.
También tenemos que $|zw| = |z||w|$ para cuaterniones z y w arbitrarios.
Usando como norma el valor absoluto, los cuateriones conforman un álgebra de Banach real.

El conjunto de los cuaterniones de valor absoluto 1 forman una esfera tridimensional S^3 y un grupo (incluso grupo de Lie) con la multiplicación.

El conjunto de los cuaterniones de valor absoluto 1 forman una esfera tridimensional S^3 y un grupo (incluso grupo de Lie) con la multiplicación.
Este grupo actúa, mediante conjugación, sobre la copia de $\mathbb{R}^3$ constituida por los cuaterniones cuya parte real es cero.
No es difícil comprobar que la conjugación por un cuaternión unidad de parte real $\cos t$ es una rotación de ángulo $2t$ con el eje de giro en la dirección de la parte imaginaria.

El conjunto de los cuaterniones de valor absoluto 1 forman una esfera tridimensional S^3 y un grupo (incluso grupo de Lie) con la multiplicación.
Este grupo actúa, mediante conjugación, sobre la copia de $\mathbb{R}^3$ constituida por los cuaterniones cuya parte real es cero.
No es difícil comprobar que la conjugación por un cuaternión unidad de parte real $\cos t$ es una rotación de ángulo $2t$ con el eje de giro en la dirección de la parte imaginaria.
Así, S^3 constituye un recubrimiento doble del grupo $SO(3)$ de matrices ortogonales 3×3 de determinante 1; es isomorfo a $SU(2)$, el grupo de matrices 2×2 complejas unitarias y con determinante unidad.

El conjunto de los cuaterniones de valor absoluto 1 forman una esfera tridimensional S^3 y un grupo (incluso grupo de Lie) con la multiplicación.
Este grupo actúa, mediante conjugación, sobre la copia de $\mathbb{R}^3$ constituida por los cuaterniones cuya parte real es cero.
No es difícil comprobar que la conjugación por un cuaternión unidad de parte real $\cos t$ es una rotación de ángulo $2t$ con el eje de giro en la dirección de la parte imaginaria.
Así, S^3 constituye un recubrimiento doble del grupo $SO(3)$ de matrices ortogonales 3×3 de determinante 1; es isomorfo a $SU(2)$, el grupo de matrices 2×2 complejas unitarias y con determinante unidad.
Si A el conjunto de cuaterniones de la forma $a + bi + cj + dk$ donde a, b, c y d son, o todos enteros o todos racionales con numerador impar y denominador 2.

El conjunto de los cuaterniones de valor absoluto 1 forman una esfera tridimensional S^3 y un grupo (incluso grupo de Lie) con la multiplicación.
Este grupo actúa, mediante conjugación, sobre la copia de $\mathbb{R}^3$ constituida por los cuaterniones cuya parte real es cero.
No es difícil comprobar que la conjugación por un cuaternión unidad de parte real $\cos t$ es una rotación de ángulo $2t$ con el eje de giro en la dirección de la parte imaginaria.
Así, S^3 constituye un recubrimiento doble del grupo $SO(3)$ de matrices ortogonales 3×3 de determinante 1; es isomorfo a $SU(2)$, el grupo de matrices 2×2 complejas unitarias y con determinante unidad.
Si A el conjunto de cuaterniones de la forma $a + bi + cj + dk$ donde a, b, c y d son, o todos enteros o todos racionales con numerador impar y denominador 2. El conjunto A es un anillo y un retículo. Hay 24 cuaterniones unitarios en este anillo y son los vértices de un politopo regular, llamado $\{3, 4, 3\}$ en la notación de Schlafli.

Los cuaterniones se utilizan a menudo en gráficos por computadora (y en el análisis geométrico asociado) para representar la orientación de un objeto en un espacio tridimensional.

Los cuaterniones se utilizan a menudo en gráficos por computadora (y en el análisis geométrico asociado) para representar la orientación de un objeto en un espacio tridimensional.
Las ventajas son: conforman una representación no singular (comparada con, por ejemplo, los ángulos de Euler), más compacta y más rápida que las matrices.

Los cuaterniones como rotaciones

Las relaciones más importantes entre los cuaterniones y las rotaciones del espacio tridimensional son consecuencias del siguiente teorema.

Los cuaterniones como rotaciones

Las relaciones más importantes entre los cuaterniones y las rotaciones del espacio tridimensional son consecuencias del siguiente teorema.

Teorema

Sea p un punto en el espacio tridimensional (proyectivo), representado como un cuaternión usando sus coordenadas homogeneas

$$p = (\eta : x : y : z) \cong [\eta, (x, y, z)] = \begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{v} \end{bmatrix};$$

y sea q un cuaternión no nulo . Entonces:

Los cuaterniones como rotaciones

Las relaciones más importantes entre los cuaterniones y las rotaciones del espacio tridimensional son consecuencias del siguiente teorema.

Teorema

Sea p un punto en el espacio tridimensional (proyectivo), representado como un cuaternión usando sus coordenadas homogeneas

$$p = (\eta : x : y : z) \cong [\eta, (x, y, z)] = \begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{v} \end{bmatrix};$$

y sea q un cuaternión no nulo . Entonces:

- *El producto* pqp^{-1} *aplica a* $p = \begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$ *en* $p^{'} = \begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{v}^{'} \end{bmatrix}$*, de modo que* $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}^{'}|$*.*

Teorema (continuación)

- *Cualquier multiplo real no nulo de q produce la misma acción.*

Teorema (continuación)

- *Cualquier multiplo real no nulo de q produce la misma acción.*
- *Si* $|q| = 1$, *entontes*

$$q = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \hat{\mathbf{v}} \sin\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

actúa para producir una rotación cuyo ángulo es α *alrededor del eje definido por* $\hat{\mathbf{v}}$.

Corolario

Toda rotación tridimensional es el resultado de la acción de algún cuaternión unitario.

Corolario

Toda rotación tridimensional es el resultado de la acción de algún cuaternión unitario.

La parametrización de orientaciones (attitudes) por cuaterniones es la más utilizada cuando se trabaja con computadores. Tiene solamente cuatro parámetros, carece de singularidades y facilitan la conservación de los parámetros.

Corolario

Toda rotación tridimensional es el resultado de la acción de algún cuaternión unitario.

La parametrización de orientaciones (attitudes) por cuaterniones es la más utilizada cuando se trabaja con computadores. Tiene solamente cuatro parámetros, carece de singularidades y facilitan la conservación de los parámetros. Una rotación en un ángulo θ alrededor de un eje $\mathbf{v}$ produce un vector de rotación

$$a_\theta = \theta \mathbf{v} \tag{9}$$

y un cuaternión

$$q = \begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \mathbf{v}\sin\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

para los cuales, las restricciones requeridas son

$$||q||^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{u} + \eta^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \eta^2 = 1. \tag{11}$$

La mayor ventaja del uso de los cuaterniones es que las rotaciones se expresan mediante el producto de cuaterniones: si la rotación de $\mathbf{u_1}$ a $\mathbf{u_2}$ se describe pr la acción de $q_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \mathbf{u_1} \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = q_1 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \overline{q_1}, \tag{12}$$

$\overline{q_1} = q_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ -\mathbf{u_1} \end{bmatrix}$ es el conjugado de q_1 y el producto de cuaterniones se define por

$$q_1 \otimes q_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \mathbf{u_1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \mathbf{u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1\eta_2 - \mathbf{u_1}^T \mathbf{u_2} \\ \eta_1 \mathbf{u_2} + \eta_2 \mathbf{u_1} + \mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

el cual no es conmutativo ya que el producto vectorial $\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2}$ no lo es.

Finalmente, cuando q_2 representa una posición y q_1 una rotación entonces la nueva posición queda representada por $q = q_1 \otimes q_2$. Escrito en forma matricial, este producto queda así:

$$q = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & \eta_1 & -u_3 & u_2 \\ u_2 & u_3 & \eta_1 & -u_1 \\ u_3 & -u_2 & u_1 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Parte VI

Referencias bibliográficas

J. Diebel, *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*, Stanford University, Stanford, California, 2006.

K.M. Fausk and I. Moerdijk, *NCUBE Attitude Control*, Department of Engineering Cybernetics, NTNU, 2002

V. M. Popov, *Hyperstability of Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1973.

K. Shoemake, *Quaternions*, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, 1992.

K. Svartveit, *Attitude determination of the NCUBE satellite*, Master Thesis, Department of Engineering Cybernetics, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet 2003.

R. Wiśniewski, *Satellite Attitude Control Using Only Electromagnetic Actuation*, Ph. D. Thesis, Department of Control Engineering, Aalborg Universit, Denmark, 1996.

M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Siam Classics in Applied Mathmatics 42, Philadelphia, 2002.